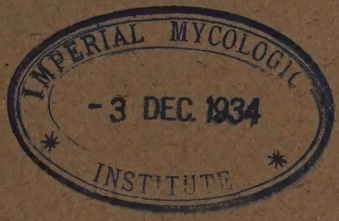
1934 № 6

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК

СОЮЗА СОВЕТСКИХ СОЦИАЛИСТИЧЕСКИХ РЕСПУБЛИК

VII СЕРИЯ

ОТДЕЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК



BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'UNION DES RÉPUBLIQUES SOVIÉTIQUES SOCIALISTES

VII SÉRIE

CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES

ЛЕНИНГРАД — LENINGRAD
ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

ПРИМЕР СТАНДАРТНОЙ ЦИТАТЫ · EXEMPLE DE CITATION

А. И. Попов. О некоторых формулах суммирования.
ИМЕН, 1934, № 6, стр. 801.

A. Popov. Sur quelques formules sommatoires.
BAS-MN, 1934, № 6, p. 801 (en russe).

Напечатано по распоряжению Академии Наук СССР

Октябрь 1934 г.

Непременный секретарь академик *В. Волин*

Редакционная коллегия: академик А. А. Борисяк
академик С. И. Вавилов
академик А. А. Рихтер
академик Д. С. Рождественский

Ответственный редактор издания академик-секретарь ОМЕН А. А. Борисяк

Технический редактор Л. А. Федоров
Ученый корректор С. С. Чернявский

Начато набором в июне 1934 г. — Подписано к печати 16 октября 1934 г.

176 (777—952) стр. (10 фиг.) + 3 табл.
Формат бум. 72 × 110 см. — 11 3/8 печ. л. — 42 000 тип. зн. в печ. л. — Тираж 3000
Ленгорлит № 25595. — АНИ № 424. — Заказ № 31

Типография Академии Наук СССР. В. О., 9 линия, 12

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1934
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ ВЕКТОРИАЛЬНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ НА ВЕКТОРА m-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА И НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ЭТОГО ОБОБЩЕНИЯ

Ю. В. ИКОРНИКОВ

(*Представлено академиком* А. Н. Крыловым)

1. Пусть функции $x_i = x_i(q_1, q_2, q_3)$ и $q_i = q_i(x_1, x_2, x_3)$, $i = 1, 2, 3$ устанавливают взаимно однозначное соответствие между упорядоченными тройками чисел x_1, x_2, x_3 и q_1, q_2, q_3. Предположим, что эти функции непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого и второго порядков.

Построим векторы

$$\text{(I)} \quad \bar{a}_i = \frac{\partial q_i}{\partial x_1} i + \frac{\partial q_i}{\partial x_2} j + \frac{\partial q_i}{\partial x_3} k, \quad \bar{h}_i = \frac{\partial x_1}{\partial q_i} i + \frac{\partial x_2}{\partial q_i} j + \frac{\partial x_3}{\partial q_i} k, \quad i = 1, 2, 3,$$

где i, j, k попарно ортогональные орты.

Дифференцируя функции $q_i = q_i(x_1, x_2, x_3)$ по q_1, q_2, q_3, легко видеть, что векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ взаимны по отношению к векторам $\bar{h}_1, \bar{h}_2, \bar{h}_3$, т. е.

$$\text{(II)} \quad (\bar{a}_1 \cdot \bar{h}_1) = 1, \quad (\bar{a}_2 \cdot \bar{h}_2) = 1, \quad (\bar{a}_3 \cdot \bar{h}_3) = 1 \text{ и } (\bar{a}_i \cdot \bar{h}_j) = 0 \quad \text{при} \quad j \neq i$$

и следовательно

$$\text{(III)} \quad \bar{a}_1 = \frac{[\bar{h}_2 \cdot \bar{h}_3]}{\delta}, \quad \bar{a}_2 = \frac{[\bar{h}_3 \cdot \bar{h}_1]}{\delta}, \quad \bar{a}_3 = \frac{[\bar{h}_1 \cdot \bar{h}_2]}{\delta}, \quad \delta = (\bar{h}_1 \cdot [\bar{h}_2 \cdot \bar{h}_3]).$$

Если векторы $\bar{h}_1, \bar{h}_2, \bar{h}_3$ попарно ортогональны, то векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ тоже попарно ортогональны, так как

$$(\bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2) = \frac{1}{\delta^2} ([\bar{h}_2 \cdot \bar{h}_3] \cdot [\bar{h}_3 \cdot \bar{h}_1]) = \frac{(\bar{h}_3 \cdot \bar{h}_1)(\bar{h}_3 \cdot \bar{h}_2) - (\bar{h}_1 \cdot \bar{h}_2) h_3^2}{\delta^2} = 0$$

и также $(\bar{a}_2 \cdot \bar{a}_3) = 0, \quad (\bar{a}_1 \cdot \bar{a}_3) = 0.$

Если векторы $\bar{h}_1, \bar{h}_2, \bar{h}_3$ попарно ортогональны, то

$$\text{(IV)} \quad a_i^2 = \frac{1}{h_i^2},$$

так как

$$a_1^2 = \frac{1}{\delta^2}\left([\bar{h}_2 \cdot \bar{h}_3] \cdot [h_2 \cdot h_3]\right) = \frac{h_2^2 h_3^2}{(\bar{h}_1[\bar{h}_2 \cdot \bar{h}_3])^2} = \frac{1}{h_1^2(\bar{\varepsilon}_1[\bar{\varepsilon}_2 \cdot \bar{\varepsilon}_3])^2} = \frac{1}{h_1^2},$$

где

$\bar{\varepsilon}_1$, $\bar{\varepsilon}_2$, $\bar{\varepsilon}_3$ орты векторов $\bar{h}_1$, $\bar{h}_2$, $\bar{h}_3$ и $\left(\bar{\varepsilon}_1 \cdot [\bar{\varepsilon}_2 \cdot \bar{\varepsilon}_3]\right)^2 = 1$.

Пусть U будет непрерывная функция от x_1, x_2, x_3, имеющая непрерывные частные производные первого и второго порядков.

Так как

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial q_i} = \left(\bar{p} \cdot \bar{h}_i\right),$$

где

$$\bar{p} = \frac{\partial U}{\partial x_1} i + \frac{\partial U}{\partial x_2} j + \frac{\partial U}{\partial x_3} q$$

и по известному свойству взаимных векторов

$$\text{(V)} \qquad \bar{p} = \left(\bar{p} \cdot \bar{h}_1\right)\bar{a}_1 + \left(\bar{p} \cdot \bar{h}_2\right)\bar{a}_2 + \left(\bar{p} \cdot \bar{h}_3\right)\bar{a}_3 = \sum_{i=1}^{3}\left(\bar{p} \cdot \bar{h}_i\right)\bar{a}_i,$$

то следовательно

$$\text{(VI)} \qquad \bar{p} = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial U}{\partial q_i}\bar{a}_i.$$

2. Пусть дана функция F от U и от $\frac{\partial U}{\partial x_1}$, $\frac{\partial U}{\partial x_2}$, $\frac{\partial U}{\partial x_3}$ и пусть переменные x_1, x_2, x_3 удовлетворяют зависимостям

$$x_i = x_i(q_1, q_2, q_3) \quad \text{и} \quad q_j = q_j(x_1, x_2, x_3), \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3.$$

Обозначим

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = u_i, \qquad \frac{\partial U}{\partial q_i} = v_i.$$

Имеем, что

$$u_i = \frac{\partial U}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial U}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{3} v_j \frac{\partial q_j}{\partial x_i}$$

и следовательно

$$\frac{\partial P}{\partial v_j} = \frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial v_j} + \frac{\partial F}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial v_j} + \frac{\partial F}{\partial u_3}\frac{\partial u_3}{\partial v_j} = \frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial q_j}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial u_2}\frac{\partial q_j}{\partial x_2} + \frac{\partial F}{\partial u_3}\frac{\partial q_j}{\partial x_3} = \left(\bar{P} \cdot \bar{a}_j\right),$$

где

$$\bar{P} = \frac{\partial F}{\partial u_1} i + \frac{\partial F}{\partial u_2} j + \frac{\partial F}{\partial u_3} p.$$

Пользуясь известным свойством взаимных векторов, имеем, что

$$\bar{P} = \left(\bar{P} \cdot \bar{a}_1\right)\bar{h}_1 + \left(\bar{P} \cdot \bar{a}_2\right)\bar{h}_2 + \left(\bar{P} \cdot \bar{a}_3\right)\bar{h}_3 = \frac{\partial F}{\partial v_1}\bar{h}_1 + \frac{\partial F}{\partial v_2}\bar{h}_2 + \frac{\partial F}{\partial v_3}\bar{h}_3.$$

Дифференцируя вектор $\overline{P}$ по q_i и помножая потом геометрически на $\overline{a}_i$, имеем, что

$$\left(\frac{\partial \overline{P}}{\partial q_i}\cdot \overline{a}_i\right)=\frac{\partial \dfrac{\partial F}{\partial v_1}}{\partial q_i}+\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial F}{\partial v_j}\left(\frac{\partial \overline{h}_j}{\partial q_i}\cdot \overline{a}_i\right)=\frac{\partial \dfrac{\partial F}{\partial v_i}}{\partial q_i}+\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial F}{\partial v_j}\left(\frac{\partial \overline{h}_i}{\partial q_j}\cdot \overline{a}_i\right)$$

и следовательно

$$\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial \overline{P}}{\partial q_i}\cdot \overline{a}_i\right)=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial \dfrac{\partial F}{\partial v_i}}{\partial q_i}+\sum_{j-1}^{3}\frac{\partial F}{\partial v_j}\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial \overline{h}_i}{\partial q_j}\cdot \overline{a}_i\right).$$

Так как

$$\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial h_i}{\partial_{,j}}\cdot \overline{a}_i\right)=\frac{1}{\delta}\left(\frac{\partial h_1}{\partial q_j}\cdot\left[\overline{h}_2\cdot \overline{h}_3\right]\right)+\frac{1}{\delta}\left(\frac{\partial \overline{h}_2}{\partial q_j}\cdot\left[\overline{h}_3\cdot \overline{h}_1\right]\right)+\frac{1}{\delta}\left(\frac{\partial \overline{h}_3}{\partial q_j}\left[\overline{h}_1\cdot \overline{h}_2\right]\right)=$$

$$=\frac{1}{\delta}\frac{\partial \delta}{\partial q_j},$$

то

$$\delta\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial \overline{P}}{\partial q_i}\cdot \overline{a}_i\right)=\sum\left[\delta\frac{\partial \dfrac{\partial F}{\partial v_i}}{\partial q_i}+\frac{\partial F}{\partial v_i}\frac{\partial \delta}{\partial q_j}\right]=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial \delta \dfrac{\partial F}{\partial v_i}}{\partial q_i}.$$

Далее имеем, что

$$\left(\frac{\partial \overline{P}}{\partial q_i}\cdot \overline{a}_i\right)=\frac{\partial \dfrac{\partial F}{\partial u_1}}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial x_1}+\frac{\partial \dfrac{\partial F}{\partial u_2}}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial x_2}+\frac{\partial \dfrac{\partial F}{\partial u_3}}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial x_3}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial F}{\partial u_1}+\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial F}{\partial u_2}+\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{\partial F}{\partial u_3}.$$

Таким образом имеем формулу преобразования для вариационной производной (Jacobi. Über eine particuläre Lösung der partiellen Differentialgleichung $\Delta U=0$. Grell Journal, t. 36).

$$\text{(VII)}\qquad \delta\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial F}{\partial u_1}+\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial F}{\partial u_2}+\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{\partial F}{\partial u_3}\right]=\frac{\partial \delta \dfrac{\partial F}{\partial v_2}}{\partial q_1}+\frac{\partial \delta \dfrac{\partial F}{\partial v_2}}{\partial q_2}+\frac{\partial \delta \dfrac{\partial F}{\partial v_3}}{\partial q_3},$$

где

$$u_i=\frac{\partial U}{\partial x_i},\quad v_i=\frac{\partial U}{\partial q_i}\quad\text{и}\quad \delta=\sum\pm\frac{\partial x_1}{\partial q_1}\frac{\partial x_2}{\partial q_2}\frac{\partial x_3}{\partial q_3}.$$

Предполагая векторы $\bar{h}_1$, $\bar{h}_2$, $\bar{h}_3$ взаимно ортогональными, из формулы VI имеем, что

$$p^2 = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial U}{\partial q_i}\right)^2 a_i^2 \text{ или } \left(\frac{\partial U}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial x_3}\right)^2 = \frac{1}{h_1^2}\left(\frac{\partial U}{\partial q_1}\right)^2 + \\ + \frac{1}{h_2^2}\left(\frac{\partial U}{\partial q_2}\right)^2 + \frac{1}{h_3^2}\left(\frac{\partial U}{\partial q_3}\right)^2.$$

Прилагая теперь формулу VII Якоби к функции

$$F = \left(\frac{\partial U}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial x_3}\right)^2$$

и замечая, что $\delta = h_1 h_2 h_3$, имеем, что

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_3^2} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial \frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial U}{\partial l_1}}{\partial q_1} + \frac{\partial \frac{h_1 h_3}{h_2}\frac{\partial U}{\partial q_2}}{\partial q_2} + \frac{\partial \frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial U}{\partial q_3}}{\partial l_3}\right],$$

т. е. имеем формулу Lamé.

Из формулы VI, в общем случае, имеем, что

$$\text{(VIII)} \quad \left(\frac{\partial U}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial x_3}\right)^2 = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial U}{\partial q_i}\right)^2 a_i^2 + 2 \sum \frac{\partial U}{\partial q_i}\frac{\partial U}{\partial q_j}(\bar{a}_i \cdot \bar{a}_j).$$

Легко видеть, что коэффициенты при $\left(\frac{\partial U}{\partial q_i}\right)^2$ и при $\frac{\partial U}{\partial q_i}\frac{\partial U}{\partial q_j}$ получаются из коэффициентов при dq_i^2 и при $dq_i\, dq_j$, входящих в формулу преобразования линейного элемента $dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$ к новым переменным q_1, q_2, q_3.

Действительно, так как

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial x_i}{\partial q_3} dq_3,$$

то

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = h_1^2 dq_1^2 + h_2^2 dq_2^2 + h_3^2 dq_3^2 + 2(\bar{h}_1 \cdot \bar{h}_2) dq_1 dq_2 + \\ + 2(\bar{h}_2 \cdot \bar{h}_3) dq_2 dq_3 + 2(\bar{h}_1 \cdot \bar{h}_3) dq_1 dq_3$$

Далее имеем, что

$$\delta^2 = h_1^2 h_2^2 h_3^2 - h_1^2(\bar{h}_2 \cdot \bar{h}_3)^2 - h_2^2(\bar{h}_1 \cdot \bar{h}_3)^2 - h_3^2(\bar{h}_1 \cdot \bar{h}_2)^2 + \\ + 2(\bar{h}_1 \cdot \bar{h}_3)(\bar{h}_2 \cdot \bar{h}_3)(\bar{h}_1 \cdot \bar{h}_2),$$

что видно из правила умножения определителей.

Обозначив $h_1^2 = A$, $h_2^2 = B$, $h_3^2 = E$, $(\bar{h}_1 \cdot \bar{h}_2) = \alpha$,

$$(\bar{h}_2 \cdot \bar{h}_3) = \beta, \quad (\bar{h}_1 \cdot \bar{h}_3) = \gamma,$$

имеем, что

$$\delta^2 = ABE - A\beta^2 - B\gamma^2 - E\alpha^2 + 2\alpha\beta\gamma.$$

По формулам III имеем, что

$$a_1^2 = \frac{BE-\beta^2}{\delta^2}, \quad a_2^2 = \frac{AE-\gamma^2}{\delta^2}, \quad a_3^2 = \frac{AB-\alpha^2}{\delta^2}, \quad (\bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2) = \frac{\beta\gamma - E\alpha}{\delta^2},$$

$$(\bar{a}_1 \cdot \bar{a}_3) = \frac{\beta\alpha - B\gamma}{\delta^2}, \quad (\bar{a}_2 \cdot \bar{a}_3) = \frac{\alpha\gamma - A\beta}{\delta^2}$$

и следовательно

$$\text{(IX)} \qquad \delta^2\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial x_3}\right)^2\right] = (BE-\beta^2)\left(\frac{\partial U}{\partial q_1}\right)^2 +$$

$$+ (AE-\gamma^2)\left(\frac{\partial U}{\partial q_2}\right)^2 + (AB-\alpha^2)\left(\frac{\partial U}{\partial q_3}\right)^2 + 2(\beta\gamma - E\alpha)\frac{\partial U}{\partial q_1}\frac{\partial U}{\partial U_2} +$$

$$+ 2(\beta\alpha - B\gamma)\frac{\partial U}{\partial q_1}\frac{\partial U}{\partial q_3} + 2(\alpha\gamma - A\beta)\frac{\partial U}{\partial q_2}\frac{\partial U}{\partial q_3},$$

если

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = Adq_1^2 + Bdq_2^2 + Edq_3^2 + 2\alpha\, dq_1\, dq_2 + 2\beta\, dq_2\, dq_3 +$$

$$+ 2\gamma\, dq_1\, dq_3.$$

3. Известно, что вектор в m-мерном пространстве можно определить как упорядоченную совокупность m чисел $x_1, x_2, x_3, \ldots x_m$. Обозначая такой вектор сокращенно $\bar{u}$, можно написать символическую формулу

$$\bar{u} = x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3 + \ldots + x_m i_m,$$

где $i_1, i_2, i_3, \ldots i_m$ символические единицы или орты. Сумма двух векторов $\bar{u}$ и $\bar{v} = y_1 i_1 + \ldots + y_m i_m$ определяется, как такой вектор, компоненты которого при i_j равны $x_j + y_j$, $j = 1, 2, 3 \ldots m$.

Геометрическое произведение векторов $\bar{u}$ и $\bar{v}$ определяется формулой

$$(\bar{u} \cdot \bar{v}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + \ldots + x_m y_m,$$

которая получается формальным перемножением правых частей предыдущих равенств под условием, что произведение символических единиц $i_j \cdot i_k = 0$ при $j \neq k$ и $i_j \cdot i_j = 1$.

Если дано $m-1$ векторов

$$\bar{u}_j = x_{1,j} i_1 + x_{2,j} i_2 + x_{3\,j} i_3 + \ldots + x_{m,j} i_m, \quad j = 1, 2, 3, \ldots m-1$$

то векторное произведение этих m-мерных векторов, число которых равно $m-1$ и которые расположены в заданном порядке $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \ldots \bar{u}_{m-1}$, определим как символический определитель

$$\begin{vmatrix} i_1, & i_2, & i_3, \ldots i_m \\ x_{1,1} & x_{2,1} & x_{3,1} \ldots x_{m,1} \\ x_{1,2} & x_{2,2} & x_{3,2} \ldots x_{m,2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{1,m-1} & x_{2,m-1} & x_{3,m-1} \ldots x_{m,m-1} \end{vmatrix}$$

и будем обозначать так $[\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2 \ldots \bar{u}_{m-1}]$.

Развернув этот определитель по элементам первой строки будем иметь новый вектор, компонентами которого будут определители порядка $m-1$.

При таком определении обычные свойства векторного произведения сохраняются, — так, если два вектора $\bar{u}_i$ и $\bar{u}_j$ «параллельны» друг другу, т. е. если их соответственные компоненты пропорциональны, то векторное произведение $m-1$ вектора, в которое входят эти два вектора, будет равно нулю. Если в векторном произведении два вектора переставить между собой, то векторное произведение изменит знак, и т. д.

Векторно геометрическое произведение m векторов, т. е.

$$(\bar{u}_0 [\bar{u}_1, \bar{u}_2 \ldots \bar{u}_{m-1}])], \text{ где } \bar{u}_0 = x_{1,0} i_1 + x_{2,0} i_2 + \ldots + x_{m,0} i_m$$

будет очевидно равно определителю порядка m

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_{1,0}, & x_{2,0}, \ldots x_{m,0} \\ x_{1,1}, & x_{2,1}, \ldots x_{m,1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{1,m-1}, & x_{2,m-1}, \ldots x_{m,m-1} \end{vmatrix}$$

и будет обращаться в нуль, если вектор $\bar{v}_0$ «параллелен» одному из векторов $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots \bar{u}_{m-1}$.

Правило геометрического умножения суммы нескольких векторов $\bar{v}_1 + \bar{v}_2, + \ldots + \bar{v}_p$ на вектор $\bar{u}$ очевидно остается в силе.

Всякий вектор $\bar{u} = y_1 i_1 + y_2 i_2 + \ldots + y_m i_m$ можно разложить по данным m векторам $\bar{v}_1, \bar{v}_2 \ldots \bar{v}_m$, если только

$$\Delta = (\bar{v}_1 [\bar{v}_2 \cdot \bar{v}_3 \ldots \bar{v}_m])$$

не равно нулю. Действительно, написав равенство

$$\bar{u} = X_1 \bar{v}_1 + X_2 \bar{v}_2 + \ldots + X_q \bar{v}_q + \ldots + X_m \bar{v}_m,$$

помножим это равенство геометрически на $[\bar{v}_2 \cdot \bar{v}_3 \ldots \bar{v}_m]$.

Имеем, что

$$X_1 = \frac{(\bar{u} \cdot [v_2 \cdot \bar{v}_3 \ldots \bar{v}_m])}{\Delta}.$$

Для определения числа X_q умножим это равенство геометрически на векторное произведение $[\bar{v}_2 \bar{v}_3 \ldots \bar{v}_{q+1} \bar{v}_1 \bar{v}_{q-1} \ldots \bar{v}_m]$, полученное из предыдущего заменою $\bar{v}_q$ на $\bar{v}_1$ и перестановкою $\bar{v}_{q-1}$ и $\bar{v}_{q+1}$ друг с другом.

Имеем, что

$$X_q = \frac{(\bar{u} \cdot [\bar{v}_2 \bar{v}_3 \ldots \bar{v}_{q+1} \bar{v}_1 \bar{v}_{q-1} \ldots \bar{v}_m])}{\Delta}.$$

Данные m векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots \bar{a}_m$ можно назвать взаимными по отношению к векторам $\bar{h}_1, \bar{h}_2, \bar{h}_3 \ldots \bar{h}_m$, если

(X) $$(\bar{a}_j \cdot \bar{h}_j) = 1 \quad \text{и} \quad (\bar{a}_j \cdot \bar{h}_k) = 0 \quad \text{при } j \neq k.$$

Легко видеть, что векторы

$$\bar{b}_1 = \frac{[\bar{h}_2 \cdot \bar{h}_3 \ldots \bar{h}_m]}{\Delta}, \quad \bar{b}_2 = \frac{[\bar{h}_3 \bar{h}_1 \bar{h}_4 \ldots \bar{h}_m]}{\Delta}, \quad \bar{b}_j = \frac{[\bar{h}_2 \bar{h}_3 \ldots \bar{h}_{j+1} \bar{h}_1 \bar{h}_{j-1} \ldots \bar{h}_m]}{\Delta},$$

$$j = 3, 4, \ldots m-1, \quad \bar{b}_m = \frac{[\bar{h}_2 \bar{h}_3 \ldots \bar{h}_{m-2} \bar{h}_1 \bar{h}_{m-1}]}{\Delta},$$

где

$$\Delta = (\bar{h}_1 [\bar{h}_2 \cdot \bar{h}_3 \ldots \bar{h}_m]) \neq 0$$

взаимны по отношению к векторам $\bar{h}_1, \bar{h}_2, \ldots \bar{h}_m$, т. е.

(XI) $$(\bar{b}_j \cdot \bar{h}_j) = 1 \quad \text{и} \quad (\bar{b}_j \cdot \bar{h}_k) = 0, \quad j \neq k.$$

Всякий вектор $\bar{u}$ можно разложить по формуле

(XII)
1) $\bar{u} = (\bar{u} \cdot \bar{b}_1) \bar{h}_1 + (\bar{u} \cdot \bar{b}_2) \bar{h}_2 + \ldots + (\bar{u} \cdot b_m) \bar{h}_m$ или по формуле
2) $\bar{u} = (\bar{u} \cdot \bar{h}_1) \bar{b}_1 + (\bar{u} \cdot \bar{h}_2) b_2 + \ldots + (\bar{u} \cdot \bar{h}_m) \bar{b}_m$

Действительно, написав разложение вектора $\bar{u}$ по векторам $\bar{h}_1, \bar{h}_2, \ldots h_m$

$$\bar{u} = X_1 \bar{h}_1 + X_2 \bar{h}_2 + \ldots + X_m \bar{h}_m,$$

что возможно, так как $\Delta \neq 0$, умножим это равенство геометрически последовательно на $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots \bar{b}_m$. В силу формул XI имеем, что

$$X_1 = (\bar{u} \cdot \bar{b}_1) \quad X_2 = (\bar{u} \cdot \bar{b}_2) \ldots X_m = (\bar{u} \cdot \bar{b}_m).$$

Для доказательства равенства XII, 2) заметим, что

$$\Delta_1 = (\bar{b}_1 \cdot [\bar{b}_2 \cdot \bar{b}_3 \ldots \bar{b}_m]) \text{ не равно нулю, если } \Delta \neq 0.$$

Действительно, если

$$\bar{b}_j = b_{1j}\, i_1 + b_{2,j}\, i_2 + \ldots + b_{m,j}\, i_m$$

и

$$\bar{h}_k = h_{1k}\, i_1 + h_{2\,k}\, i_2 + \ldots + h_{m\,k}\, i_m,$$

то

$$\Delta_1 \Delta = \begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{2,1} & \ldots & b_{m,1} \\ b_{1,2} & b_{2,2} & \ldots & b_{m,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{1,m} & b_{2,m} & \ldots & b_{m,m} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} h_{1,1} & h_{2,1} & \ldots & h_{m,1} \\ h_{1,2} & h_{2,2} & \ldots & h_{m,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ h_{1,m} & h_{2,m} & \ldots & h_{m,m} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (\bar{b}_1 \cdot \bar{h}_1) & (\bar{b}_1 \cdot \bar{h}_2) \ldots (\bar{b}_1 \cdot \bar{h}_m) \\ (\bar{b}_2 \cdot \bar{h}_1) & (\bar{b}_2 \cdot \bar{h}_2) \ldots (\bar{b}_2 \cdot \bar{h}_m) \\ \ldots & \ldots \\ (\bar{b}_m \cdot \bar{h}_1) & (\bar{b}_m \cdot \bar{h}_2) \ldots (\bar{b}_m \cdot \bar{h}_m) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & 0, \ldots 0 \\ 0, & 1, \ldots 0 \\ \ldots & \ldots \\ 0, & 0, \ldots 1 \end{vmatrix} = 1 \quad \text{в силу формул XI.}$$

Таким образом имеем, что $\Delta_1 = \frac{1}{\Delta} \neq 0$. Разложив теперь вектор $\bar{u}$ по векторам $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots \bar{b}_m$ и умножая такое разложение последовательно геометрически на $\bar{h}_1, \bar{h}_2, \ldots \bar{h}_m$, имеем формулу XII, 2).

Разложив вектор $\bar{a}_j$, удовлетворяющий уравнению X, по формуле XII, 2), имеем, что

$$\bar{a}_j = (\bar{a}_j \cdot \bar{h}_1)\bar{b}_1 + \ldots + (\bar{a}_j \cdot \bar{h}_j)\bar{b}_j + \ldots + (\bar{a}_j \cdot \bar{h}_m)\bar{b}_m$$

и следовательно, в силу формул X, имеем, что $\bar{a}_j = \bar{b}_j$, $j = 1, 2, 3, \ldots m$.

Таким образом каждой системе векторов $\bar{h}_1, \bar{h}_2, \ldots \bar{h}_m$, расположенных в определенном порядке, соответствует только одна система взаимных векторов, удовлетворяющих уравнениям X и равных соответственно векторам $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots \bar{b}_m$, определяемым формулами XI.

4. Пусть теперь дана функция F, зависящая от функции $U(x_1 x_2, \dots x_m)$ и от

$$\frac{\partial U}{\partial x_1}, \frac{\partial U}{\partial x_2}, \dots \frac{\partial U}{\partial x_m}.$$

Пусть функции

$$1)\ x_j = x_j(q_1, q_2, \dots q_m) \qquad 2)\ q_j = q_j(x_1, x_2, \dots x_m),\ j = 1, 2, 3, \dots m$$

устанавливают взаимно однозначное соответствие между упорядоченными системами чисел $x_1, x_2, \dots x_m$ и упорядоченными системами чисел $q_1, q_2, \dots q_m$. Предположим, что эти функции непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого и второго порядков.

Построим вокторы

$$\bar{a}_i = \frac{\partial q_i}{\partial x_1} i_1 + \frac{\partial q^i}{\partial x_2} i_2 + \dots + \frac{\partial q_i}{\partial x_m} i_m \; u \; \bar{h}_i = \frac{\partial x_1}{\partial q_i} i_1 + \frac{\partial x_2}{\partial q_i} i_2 + \dots + \frac{\partial x_m}{\partial q_i} i_m,$$

$$i = 1, 2, 3, \dots m.$$

Дифференцируя равенства 2) по $q_1, q_2, \dots q_m$, имеем, что

$$(\bar{a}_j \cdot \bar{h}_j) = 1 \quad \text{и} \quad (\bar{a}_j \cdot \bar{h}_i) = 0 \quad \text{при}, \ j \neq i,$$

и следовательно, векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots \bar{a}_m$ взаимны по отношению к векторам $\bar{h}_1, \bar{h}_2, \dots \bar{h}_m$ и

$$\bar{a}_1 = \frac{[\bar{h}_2 \cdot \bar{h}_3 \dots \bar{h}_m]}{\Delta}, \quad \bar{a}_2 = \frac{[\bar{h}_3 \cdot \bar{h}_1 \cdot \bar{h}_4 \dots \bar{h}_m]}{\Delta},$$

(XIII)
$$\bar{a}_j = \frac{[\bar{h}_2 \cdot \bar{h}_3 \dots \bar{h}_{j+1} \bar{h}_1 \bar{h}_{j-1} \dots \bar{h}_m]}{\Delta}, \ j = 3, 4 \dots m-1,$$

$$\bar{a}_m = \frac{[\bar{h}_2 \bar{h}_3 \dots \bar{h}_{m-2} \bar{h}_1 \bar{h}_{m-1}]}{\Delta}.$$

Далее обозначим

$$\frac{\partial U}{\partial xi} = u_i \quad \text{и} \quad \frac{\partial U}{\partial qi} = v_i.$$

Так как

$$u_i = \frac{\partial U}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial U}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{m} v_j \frac{\partial q_j}{\partial x_i},$$

то

$$\frac{\partial F}{\partial v_j} = \frac{\partial F}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial v_j} + \frac{\partial F}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial v_j} + \dots + \frac{\partial F}{\partial u_m} \frac{\partial u_m}{\partial v_j} = \frac{\partial F}{\partial u_1} \frac{\partial q_j}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial u_2} \frac{\partial q_j}{\partial x_2} + \dots$$

$$\dots + \frac{\partial F}{\partial u_m} \frac{\partial q_j}{\partial x_m} = (\bar{P} \cdot \bar{a}_j), \quad \text{где} \quad \bar{P} = \frac{\partial F}{\partial u_1} i_1 + \frac{\partial F}{\partial u_2} i_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial u_m} i_m.$$

По формуле XII теперь имеем, что

$$\overline{P} = (\overline{P} \cdot \overline{a}_1)\,\overline{h}_1 + (\overline{P} \cdot \overline{a}_2)\,\overline{h}_2 + \ldots + (\overline{P} \cdot \overline{a}_m)\,\overline{h}_m$$

и следовательно

$$\overline{P} = \frac{\partial F}{\partial v_1}\overline{h}_1 + \frac{\partial F}{\partial v_2}\overline{h}_2 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial v_m}\overline{h}_m.$$

Дифференцируя вектор $\overline{P}$ по q_i и помножая потом геометрически на $\overline{a}_i$, имеем, что

$$\left(\frac{\partial \overline{P}}{\partial q_i} \cdot \overline{a}_i\right) = \frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\partial F}{\partial v_i} + \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial F}{\partial v_j}\left(\frac{\partial \overline{h}_j}{\partial q_i} \cdot \overline{a}_i\right) = \frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\partial F}{\partial v_i} + \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial F}{\partial v_j}\left(\frac{\partial \overline{h}_i}{\partial q_j} \cdot \overline{a}_i\right)$$

и следовательно

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial \overline{P}}{\partial q_i} \cdot \overline{a}_i\right) = \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\partial F}{\partial v_i} + \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial F}{\partial v_j}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial \overline{h}_i}{\partial q_j} \cdot \overline{a}_i\right).$$

Так как

$$\Delta\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial \overline{h}_i}{\partial q_j} \cdot \overline{a}_i\right) = \left(\frac{\partial \overline{h}_1}{\partial q_j} \cdot \left[\overline{h}_2 \cdot \overline{h}_3 \ldots \overline{h}_m\right]\right) + \left(\frac{\partial \overline{h}_2}{\partial q_j}\left[\overline{h}_3 \cdot \overline{h}_1\,\overline{h}_4 \ldots \overline{h}_m\right]\right) + \ldots$$
$$\ldots + \left(\frac{\partial \overline{h}_m}{\partial q_j}\left[\overline{h}_2 \cdot \overline{h}_3 \ldots \overline{h}_{m-2}\,\overline{h}_1\,\overline{h}_{m-1}\right]\right) = \frac{\partial}{\partial q_j}\Delta,$$

то следовательно

$$\Delta\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial \overline{P}}{\partial q_i} \cdot \overline{a}_i\right) = \sum_{i=1}^{m}\left[\Delta\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\partial F}{\partial v_i} + \frac{\partial F}{\partial v_i}\frac{\partial \Delta}{\partial q_i}\right] = \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial q_i}\Delta\frac{\partial F}{\partial v_i}.$$

Далее имеем, что

$$\left(\frac{\partial \overline{P}}{\partial q_i} \cdot \overline{a}_i\right) = \frac{\partial\dfrac{\partial F}{\partial u_1}}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial x_1} + \frac{\partial\dfrac{\partial F}{\partial u_2}}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial\dfrac{\partial F}{\partial u_m}}{\partial q_i}\frac{\partial q_1}{\partial x_m}$$

и следовательно

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial \overline{P}}{\partial q_i} \cdot \overline{a}_i\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial F}{\partial u_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial F}{\partial u_2} + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m}\frac{\partial F}{\partial u_m}.$$

Таким образом имеем обобщение формулы, данной Якоби в указанном мемуаре

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial F}{\partial u_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial F}{\partial u_2} + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m}\frac{\partial F}{\partial u_m} = \frac{\partial}{\partial q_1}\Delta\frac{\partial F}{\partial v_1} + \frac{\partial}{\partial q_2}\Delta\frac{\partial F}{\partial v_2} + \ldots$$
(XIV)
$$\ldots + \frac{\partial}{\partial q_m}\Delta\frac{\partial F}{\partial v_m},$$

где

$$u_1 = \frac{\partial U}{\partial x_1},\ u_2 = \frac{\partial U}{\partial x_2},\ \ldots\ u_m = \frac{\partial U}{\partial x_m},\ v_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1},\ v_2 = \frac{\partial U}{\partial q_2},\ \ldots\ v_m = \frac{\partial U}{\partial q_m}$$

и

$$\Delta = \sum \pm \frac{\partial x_1}{\partial q_1}\frac{\partial x_2}{\partial x q_2}\ldots\frac{\partial x_m}{\partial q_m}.$$

5. Формулу векториально-векториального или двойного векториального произведения трехмерных векторов тоже можно обобщить. Для простоты выведем обобщенную формулу для четырехмерных векторов.

Действительно, пусть $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$, $\bar{e}$ будут четырехмерные векторы и пусть

$$\bar{a} = a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 + a_4 i_4 \quad \text{и т. д.}$$

Имеем, что $[\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}] = \begin{vmatrix} i_1, & i_2, & i_3, & i_4 \\ a_1, & a_2, & a_3, & a_4 \\ b_1, & b_2, & b_3, & b_4 \\ c_1, & c_2, & c_3, & c_4 \end{vmatrix} = \Delta_1 i_1 + \Delta_2 i_2 + \Delta_3 i_3 + \Delta_4 i_4,$

где $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1_1\,0\,0\,0 \\ a_1\ a_2\ a_3\ a_4 \\ b_1\ b_2\ b_3\ b_4 \\ c_1\ c_2\ c_3\ c_3 \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0, & 1, & 0, & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_3 \end{vmatrix}$ $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0, & 0, & 1, & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}$,

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 0, & 0, & 0, & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}$$

Далее имеем, что

$$[\bar{d}\cdot\bar{e}\,[\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}]] = \begin{vmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & i_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 & \Delta_4 \end{vmatrix} = \delta_1 i_1 + \delta_2 i_2 + \delta_3 i_3 + \delta_4 i_4,$$

где $\delta_1 = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ d_1, & d_2, & d_3, & d_4 \\ e_1, & e_2, & e_3, & e_4 \\ \Delta_1, & \Delta_2, & \Delta_3, & \Delta_4 \end{vmatrix}$, $\delta_2 = \begin{vmatrix} 0, & 1, & 0, & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 & \Delta_4 \end{vmatrix}$, $\delta_3 = \begin{vmatrix} 0, & 0, & 1, & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_3 \\ \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 & \Delta_4 \end{vmatrix}$

$$\delta_4 = \begin{vmatrix} 0, & 0, & 0, & 1 \\ d_1, & d_2, & d_3, & d_4 \\ e_1, & e_2, & e_3, & e_4 \\ \Delta_1, & \Delta_2, & \Delta_3, & \Delta_4 \end{vmatrix}.$$

Далее имеем, что $\delta_1 = \Delta_2\alpha_2 + \Delta_3\alpha_3 + \Delta_4\alpha_4$, где $\alpha_2 = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0 \\ d_1, & d_2, & d_3, & d_4 \\ e_1, & e_2, & e_3, & e_4 \end{vmatrix}$

$$\alpha_3 = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ d_1, & d_2, & d_3, & d_4 \\ e_1, & e_2, & e_3, & c_4 \end{vmatrix}, \quad \alpha_4 = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \\ d_1, & d_2, & d_3, & d_4 \\ e_1, & e_2, & e_3, & e_4 \end{vmatrix}$$

и следовательно,

$$\Delta_2\alpha_2 = \begin{vmatrix} 0, & 1, & d_2, & e_2 \\ a_1, & a_2, & (\bar{a}\cdot\bar{d}), & (\bar{a}\cdot\bar{e}) \\ b_1, & b_2, & (\bar{b}\cdot\bar{d}), & [\bar{b}\cdot\bar{e}) \\ c_1, & c_2, & (\bar{c}\cdot\bar{d}), & (\bar{c}\cdot\bar{e}) \end{vmatrix}, \quad \Delta_3\alpha_3 = \begin{vmatrix} 0, & 1, & d_3, & e_3 \\ a_1, & a_3, & (\bar{a}\cdot\bar{d}), & (\bar{a}\cdot\bar{e}) \\ b_1, & b_3, & (\bar{b}\cdot\bar{d}), & (\bar{b}\cdot\bar{e}) \\ c_1, & c_3, & (\bar{c}\cdot\bar{d}), & (\bar{c}\cdot\bar{e}) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_4\alpha_4 = \begin{vmatrix} 0, & 1, & d_4, & e_4 \\ a_1, & a_4, & (\bar{a}\cdot\bar{d}), & (\bar{a}\cdot\bar{e}) \\ b_1, & b_4, & (\bar{b}\cdot\bar{d}), & (\bar{b}\cdot\bar{e}) \\ c_1, & c_4, & (\bar{c}\cdot\bar{d}), & (\bar{c}\cdot\bar{e}) \end{vmatrix}.$$

Таким образом имеем, что $\delta_1 = a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1$,

где

$$-A_1 = \begin{vmatrix} 1, & d_2 & e_2 \\ b_2, & (\bar{b}\cdot\bar{d}), & (\bar{b}\cdot\bar{e}) \\ c_2, & (\bar{c}\cdot\bar{d}), & (\bar{c}\cdot\bar{e}) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1, & d_3, & e_3 \\ b_3 & (\bar{b}\cdot\bar{d}) & (\bar{b}\cdot\bar{e}) \\ c_3 & (\bar{c}\cdot\bar{d}) & (\bar{c}\cdot\bar{e}) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1, & d_4, & e_4 \\ b_4 & (\bar{b}\cdot\bar{d}) & (\bar{b}\cdot\bar{e}) \\ c_4 & (\bar{c}\cdot\bar{d}) & (\bar{c}\cdot\bar{e}) \end{vmatrix}$$

и следовательно

$$-A_1 = \begin{vmatrix} (\bar{b}\cdot\bar{d}) & (\bar{b}\cdot\bar{e}) \\ (\bar{c}\cdot\bar{d}) & (\bar{c}\cdot\bar{e}) \end{vmatrix} + b_1 \begin{vmatrix} d_1, & e_1 \\ (\bar{c}\cdot\bar{d}), & (\bar{c}\cdot\bar{e}) \end{vmatrix} - c_1 \begin{vmatrix} d_1, & e_1 \\ (\bar{b}\cdot\bar{d}), & (\bar{b}\cdot\bar{e}) \end{vmatrix}.$$

Так же доказывается, что

$$B_1 = \begin{vmatrix} (\bar{a}\cdot\bar{d}) & (\bar{a}\cdot\bar{e}) \\ (\bar{c}\cdot\bar{d}) & (\bar{c}\cdot\bar{e}) \end{vmatrix} + a_1 \begin{vmatrix} d_1 & e_1 \\ (\bar{c}\cdot\bar{d}) & (\bar{c}\cdot\bar{e}) \end{vmatrix} - c_1 \begin{vmatrix} d_1 & e_1 \\ (\bar{a}\cdot\bar{d}) & (\bar{a}\cdot\bar{e}) \end{vmatrix},$$

$$-C_1 = \begin{vmatrix} (\bar{a}\cdot\bar{d}), & (\bar{a}\cdot\bar{e}) \\ (\bar{b}\cdot\bar{d}) & (\bar{b}\cdot\bar{e}) \end{vmatrix} + a_1 \begin{vmatrix} d_1 & e_1 \\ (\bar{b}\cdot\bar{d}) & (\bar{b}\cdot\bar{e}) \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} d_1 & e_1 \\ (\bar{a}\cdot\bar{d}) & (\bar{a}\cdot\bar{e}) \end{vmatrix}$$

и

$$\delta_1 = -a_1 \begin{vmatrix} (\bar{b}\cdot\bar{d}) & (\bar{b}\cdot\bar{e}) \\ (\bar{c}\cdot\bar{d}), & (\bar{c}\cdot\bar{e}) \end{vmatrix} + b_1 \begin{vmatrix} (\bar{a}\cdot\bar{d}) & (\bar{a}\cdot\bar{e}) \\ (\bar{c}\cdot\bar{d}) & (\bar{c}\cdot\bar{e}) \end{vmatrix} - c_1 \begin{vmatrix} (\bar{a}\cdot\bar{d}) & (\bar{a}\cdot\bar{e}) \\ (\bar{b}\cdot\bar{d}) & (\bar{b}\cdot\bar{e}) \end{vmatrix}.$$

Так же доказывается, что

$$\delta_2 = -a_2\begin{vmatrix}(\bar b\cdot\bar d)&(\bar b\cdot\bar e)\\(\bar c\cdot\bar d),&(\bar c\cdot\bar e)\end{vmatrix} + b_2\begin{vmatrix}(\bar a\cdot\bar d),&(\bar a\cdot\bar e)\\(\bar c\cdot\bar d),&(\bar c\cdot\bar e)\end{vmatrix} - c_2\begin{vmatrix}(\bar a\cdot\bar d),&(\bar a\cdot\bar e)\\(\bar b\cdot\bar d),&(\bar b\cdot\bar e)\end{vmatrix}$$

$$\delta_3 = -a_3\begin{vmatrix}(\bar b\cdot\bar d),&(\bar b\cdot\bar e)\\(\bar c\cdot\bar d),&(\bar c\cdot\bar e)\end{vmatrix} + b_3\begin{vmatrix}(\bar a\cdot\bar d),&(\bar a\cdot\bar e)\\(\bar c\cdot\bar d),&(\bar c\cdot\bar e)\end{vmatrix} - c_3\begin{vmatrix}(\bar a\cdot\bar d),&(\bar a\cdot\bar e)\\(\bar b\cdot\bar d),&(\bar b\cdot\bar e)\end{vmatrix}$$

$$\delta_4 = -a_4\begin{vmatrix}(\bar b\cdot\bar d),&(\bar b\cdot\bar e)\\(\bar c\cdot\bar d),&(\bar c\cdot\bar e)\end{vmatrix} + b_4\begin{vmatrix}(\bar a\cdot\bar d),&(\bar a\cdot\bar e)\\(\bar c\cdot\bar d),&(\bar c\cdot\bar e)\end{vmatrix} - c_4\begin{vmatrix}(\bar a\cdot\bar d),&(\bar a\cdot\bar e)\\(\bar b\cdot\bar d),&(\bar b\cdot\bar e)\end{vmatrix}.$$

Таким образом имеем формулу

$$\text{(XV)}\quad [\bar d\cdot\bar e\cdot[\bar a\cdot\bar b\cdot\bar c]] = \begin{vmatrix}(\bar c\cdot\bar d)&(\bar c\cdot\bar e)\\(\bar b\cdot\bar d)&(\bar b\cdot\bar e)\end{vmatrix}\bar a + \begin{vmatrix}(\bar a\cdot\bar d)&(\bar a\cdot\bar e)\\(\bar c\cdot\bar d)&(\bar c\cdot\bar e)\end{vmatrix}\bar b + \begin{vmatrix}(\bar b\cdot\bar d)&(\bar b\cdot\bar e)\\(\bar a\cdot\bar d)&(\bar a\cdot\bar e)\end{vmatrix}\bar c,$$

которую можно считать обобщением формулы для двойного векторного произведения трехмерных векторов на четырехмерные вектора.

Далее пусть $[\bar d\cdot\bar e\cdot\bar f] = \begin{vmatrix} i_1, & i_2, & i_3, & i_4\\ d_1, & d_2, & d_3, & d_4\\ e_1, & e_2, & e_3, & e_4\\ f_1, & f_2, & f_3, & f_4\end{vmatrix}$ и $[\bar a\cdot\bar b\cdot\bar c] = \Delta_1 i_1 + \Delta_2 i_2 + \Delta_3 i_3 + \Delta_4 i_4.$

Имеем, что $([\bar d\cdot\bar e\cdot\bar f]\cdot[\bar a\cdot\bar b\cdot\bar c]) = \begin{vmatrix} d_2, & d_3, & d_4\\ e_2, & e_3, & e_4\\ f_2, & f_3, & f_4\end{vmatrix}\Delta_1 - \begin{vmatrix} d_1, & d_3, & d_4\\ e_1, & e_3, & e_4\\ f_1, & f_3, & f_4\end{vmatrix}\Delta_2 + \begin{vmatrix} d_1, & d_2, & d_4\\ e_1, & e_2, & e_4\\ f_1, & f_2, & f_4\end{vmatrix}\Delta_3 - \begin{vmatrix} d_1, & d_2, & d_3\\ e_1, & e_2, & e_3\\ f_1, & f_2, & f_3\end{vmatrix}\Delta_4.$

С другой стороны, по определению имеем, что

$(\bar d\cdot[\bar e\cdot\bar f\cdot[\bar a\cdot\bar b\cdot\bar c]]) = \begin{vmatrix} d_1, & d_2, & d_3, & d_4\\ e_1, & e_2, & e_3, & e_4\\ f_1, & f_2, & f_3, & f_4\\ \Delta_1, & \Delta_2, & \Delta_3, & \Delta_4\end{vmatrix}$. Разлагая этот определитель по элементам четвертой строки, легко видеть, что

$$\text{(XVI)}\quad ([\bar d\cdot\bar e\cdot\bar f]\cdot[\bar a\cdot\bar b\cdot\bar c]) = -(\bar d\cdot[\bar e\cdot\bar f\cdot[\bar a\cdot\bar b\cdot\bar c]]).$$

Таким образом при перестановке знаков векториального и геометрического умножения знак произведения меняется на обратный.

Написав формулы XIII для четырехмерных векторов, имеем, что

$$\bar{a}_1 = \frac{[\bar{h}_2 \cdot \bar{h}_3 \cdot \bar{h}_4]}{\Delta}, \quad \bar{a}_2 = \frac{[\bar{h}_3 \cdot \bar{h}_1 \cdot \bar{h}_4]}{\Delta}, \quad \bar{a}_3 = \frac{[\bar{h}_4 \cdot \bar{h}_1 \cdot \bar{h}_2]}{\Delta}, \quad \bar{a}_4 = \frac{[\bar{h}_2 \cdot \bar{h}_1 \cdot \bar{h}_3]}{\Delta},$$

$$\Delta = (\bar{h}_1 \cdot [\bar{h}_2 \cdot \bar{h}_3 \cdot \bar{h}_4]).$$

Теперь легко видеть, что векторы $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$, $\bar{a}_4$ взаимно ортогональны, если векторы $\bar{h}_1$, $\bar{h}_2$, $\bar{h}_3$, $\bar{h}_4$ взаимно ортогональны. Действительно, пользуясь формулами XV и XVI, имеем, что

$$(\bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2) = \frac{([\bar{h}_2 \cdot \bar{h}_3 \cdot \bar{h}_4] \cdot [\bar{h}_3 \cdot \bar{h}_1 \cdot \bar{h}_4])}{\Delta^2} = -\frac{(\bar{h}_2 \cdot [\bar{h}_3 \cdot \bar{h}_4 \cdot [\bar{h}_3 \cdot \bar{h}_1 \cdot \bar{h}_4]])}{\Delta_2},$$

где

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} h_1^2, (\bar{h}_1 \cdot \bar{h}_2), (\bar{h}_1 \cdot \bar{h}_3), (\bar{h}_1 \cdot \bar{h}_4) \\ (\bar{h}_1 \cdot \bar{h}_2), h_2^2, (\bar{h}_2 \cdot \bar{h}_3), (\bar{h}_2 \cdot \bar{h}_4) \\ (\bar{h}_1 \cdot \bar{h}_3), (\bar{h}_2 \cdot \bar{h}_3), h_3^2, (\bar{h}_3 \cdot \bar{h}_4) \\ (\bar{h}_1 \cdot \bar{h}_4), (\bar{h}_2 \cdot \bar{h}_4), (\bar{h}_3 \cdot \bar{h}_4), h_4^2 \end{vmatrix} = h_1^2 h_2^2 h_3^2 h_4^2.$$

В силу формулы XV имеем, что

$$[\bar{h}_3 \cdot \bar{h}_4 \cdot [\bar{h}_3 \cdot \bar{h}_1 \cdot \bar{h}_4]] = \begin{vmatrix} (\bar{h}_3 \cdot \bar{h}_4), & h_4^2 \\ (\bar{h}_3 \cdot \bar{h}_1), & (\bar{h}_4 \cdot \bar{h}_1) \end{vmatrix} \bar{h}_3 + \begin{vmatrix} h_3^2, (\bar{h}_4 \cdot \bar{h}_3) \\ (\bar{h}_3 \cdot \bar{h}_4), h_4^2 \end{vmatrix} \bar{h}_1 +$$

$$+ \begin{vmatrix} (\bar{h}_3 \cdot \bar{h}_1), (\bar{h}_4 \cdot \bar{h}_1) \\ h_3^2, (\bar{h}_3 \cdot \bar{h}_4) \end{vmatrix} \bar{h}_4$$

и следовательно, $(\bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2) = 0$, при условии, что $(\bar{h}_j \cdot \bar{h}_i) = 0 \quad i \neq j$ и т. д.

При этом условии, в силу формул XV и XVI имеем, что

$$a_1^2 = \frac{1}{h_1^2}, \quad a_2^2 = \frac{1}{h_2^2}, \quad a_3^2 = \frac{1}{h_3^2}, \quad a_4^2 = \frac{1}{h_4^2}.$$

Действительно, имеем что

$$a_1^2 = (\bar{a}_1 \cdot \bar{a}_1) = \frac{([\bar{h}_2 \cdot \bar{h}_3 \cdot \bar{h}_4] \cdot [\bar{h}_2 \cdot \bar{h}_3 \cdot \bar{h}_4])}{\Delta^2} = -\frac{(\bar{h}_2 \cdot [\bar{h}_3 \cdot \bar{h}_4 \cdot [\bar{h}_2 \cdot \bar{h}_3 \cdot \bar{h}_4]])}{\Delta^2}$$

и

$$[\bar{h}_3 \cdot \bar{h}_4 \cdot [\bar{h}_2 \cdot \bar{h}_3 \cdot \bar{h}_4]] = \begin{vmatrix} 0, & h_4^2 \\ h_3^2, & 0 \end{vmatrix} \bar{h}_2 + \begin{vmatrix} 0, & 0 \\ 0, & h_4^2 \end{vmatrix} \bar{h}_3 + \begin{vmatrix} h_3^2, & 0 \\ 0, & 0 \end{vmatrix} \bar{h}_4 = -h_3^2 h_4^2 \bar{h}_2$$

и следовательно,

$$a_1^2 = \frac{h_3^2 h_4^2 h_2^2}{\Delta^2} = \frac{1}{h_1^2}.$$

Так же доказываются и остальные формулы.

Если U какая-нибудь непрерывная функция от x_1, x_2, x_3, x_4, имеющая непрерывные частные производные первого и второго порядков, то легко написать формулу, аналогичную формуле VI. Действительно имеем, что

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial x_4}\frac{\partial x_4}{\partial q_i} = (\bar{p}\cdot\bar{h}_i), \quad \bar{p} = \frac{\partial U}{\partial x_1}i_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2}i_2 + \frac{\partial U}{\partial x_3}i_3 + \frac{\partial U}{\partial x_4}i_4 \quad \text{и}$$

следовательно, в силу формулы XII, будем иметь, что

(XVII)
$$\bar{p} = \sum_{i=1}^{4}\frac{\partial U}{\partial q_i}\bar{a}_i$$

Из этой формулы имеем, что

(XVIII)
$$\left(\frac{\partial U}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial x_4}\right)^2 = \sum_{i=1}^{4}\left(\frac{\partial U}{\partial q_i}\right)^2 a_i^2 + 2\sum\frac{\partial U}{\partial q_i}\frac{\partial U}{\partial q_j}(\bar{a}_i\cdot\bar{a}_j).$$

Так же, как и при выводе формулы XV, легко видеть, что коэффициенты в этой формуле XVIII при $\left(\frac{\partial U}{\partial q_i}\right)^2$ и при $\frac{\partial U}{\partial q_i}\frac{\partial U}{\partial q_j}$ получаются из коэффициентов при dq_i^2 и при $dq_i\,dq_j$, входящих в формулу преобразования линейного элемента $dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$ к новым переменным q_1, q_2, q_3, q_4.

Если векторы $\bar{h}_1$, $\bar{h}_2$, $\bar{h}_3$, $\bar{h}_4$ взаимно ортогональны, то эта формула принимает вид

$$\sum_{i=1}^{4}\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\right)^2 = \sum_{i=1}^{4}\frac{1}{h_i^2}\left(\frac{\partial U}{\partial q_i}\right)^2.$$

Прилагая теперь обобщенную формулу Якоби XIV к функции

$$F = \sum_{i=1}^{4}\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\right)^2.$$

имеем

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_4^2} = \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2 h_3 h_4}{h_1}\frac{\partial U}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_1 h_3 h_4}{h_2}\frac{\partial U}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1 h_2 h_4}{h_3}\frac{\partial U}{\partial q_3}\right) + \frac{\partial}{\partial q_4}\left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_4}\frac{\partial U}{\partial q_4}\right),$$

так как
$$\Delta = h_1 h_2 h_3 h_4.$$

Таким образом имеем обобщение формулы Lamé.

G. IKORNIKOV. GÉNÉRALISATION DE LA NOTION DE PRODUIT VECTORIEL SUR L'ESPACE A m DIMENSIONS

RÉSUMÉ

Dans l'espace à trois dimensions il suffit d'avoir deux vecteurs pour construire leur produit vectoriel. Par analogie, dans l'espace à quatre dimensions, on peut définir le produit vectoriel de trois vecteurs et dans l'espace à m dimensions de $m-1$ vecteurs. On peut définir cé produit, comme un déterminant symbolique d'ordre m.

Or, on peut généraliser tous les théorèmes, qui définissent les propriétés fondamentales de produit vectoriel dans l'espace à trois dimensions sur l'espace à m dimensions. La méthode des vecteurs mutuels, que l'auteur utilisait dans ses travaux (Bulletin de l'Académie des Sciences de l'URSS, 1932) peut être ainsi étendue aux quelques problèmes de l'espace à m dimensions.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1934
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

SUR LA SPHÈRE VIDE

A LA MÉMOIRE DE GEORGES VORONOÏ

Par B. DELAUNAY

(*Presenté par* I. Vinogradov, *membre de l'Académie*)

Soit donné un système quelconque de points dans l'espace à n dimensions. Je me propose de considérer une sphère se mouvant entre les points de ce système se rétrécissant et se dilatant à volonté et assujettie à la seule condition d'être «vide», c'est-à-dire de ne pas contenir dans son intérieur des points de ce système. C'est la «méthode de la sphère vide» que j'ai proposé pour la première fois dans une communication faite au Congrès de Toronto.

Je montre dans ce qui suit que le «theorème fondamental», qui est contenu dans le grand mémoire de Voronoï sur les formes quadratiques inseré dans les tomes 134 et 136 du Journal de Crelle, est une conséquence presque immédiate d'un lemme tout à fait général. Je pense que la démonstration plus simple du théorème fondamental de Voronoï, que je propose, contribuerat à répandre parmi les géomètres les resultats excessivement importants obtenus par Voronoï dans le mémoire mentionné du Journal de Crelle, qui était son dernier oeuvre.

§ 1. **Lemme général.** *Soient T des tétraèdres tout à fait arbitraires qui partagent uniformément l'espace à n dimensions étant contigus par des faces entières à $n-1$ dimensions et tels qu'un domaine quelconque limité (c'est-à-dire à diamètre limité) ait des points communs seulement avec un nombre limité de ces tétraèdres, alors la condition nécessaire et suffisante pour qu'aucune sphère circonscrite à un tel tétraèdre ne contienne dans son intérieur aucun sommet d'aucun de ces tétraèdres est que cela ait lieu pour chaque paire de deux de ces tétraèdres contigus par une face à $n-1$ dimensions, c'est-à-dire que dans chaque telle paire le sommet d'un de ces tétraèdres ne soit pas intérieur à la sphère circonscrite à l'autre, et réciproquement.*

Il est évident que cela est nécessaire. Mais cela est aussi suffisant. En effet, soit T_1 un de ces tétraèdres, et A un sommet d'un quelconque de ces tétraèdres. Soit B un point intérieur de T_1. Si le segment de droite AB, en passant d'un

tétraèdre de la partition dans un autre, coupe une face à moins que n—1 dimensions, on peut varier la position du point B dans l'intérieur de T_1 de la sorte que cela n'ait plus lieu. Désignons par T_1, T_2, $T_3 \ldots T_k$ les tétraèdres consécutifs qui sont coupés par le segment BA à partir du point B jusqu'au point A, et soient F_{12}, $F_{23} \ldots F_{k-1k}$ les faces à n—1 dimensions par lesquelles sont contigus ces tétraèdres consécutifs et que coupe le segment BA en passant d'un de ces tétraèdres dans un autre. Il est évident que le point A est situé toujours du même côte d'un tel «plan» F_{ii+1} à n—1 dimensions que le tétraèdre suivant T_{i+1} des deux tétraèdres consécutifs T_i, T_{i+1} qui sont contigus par ce plan. Nous allons nommer ce côté du plan «supérieur». Il est facile de montrer que si le sommet de T_i n'est pas intérieur à la sphère circonscrite au tétraèdre T_{i+1}, et inversement, alors ou bien les sphères circonscrites à ces deux tétraèdres coïncident, ou bien le vecteur C_iC_{i+1}, qui unit les centres de ces sphères est dirigé du côté «inférieur» du plan F_{ii+1} à son côté «supérieur». Mais il est facile de calculer que dans ce cas la «puissance» (le carré de la longueur de la tangente) τ_i du point A par rapport à la sphère (T_i) n'est pas moindre (algébriquement) que la puissance τ_{i+1} de ce point par rapport à la sphère (T_{i+1}). Nous obtenons ainsi:

$$\tau_1 \geqq \tau_2 \geqq \ldots\ldots\ldots\ldots \geqq \tau_{k-1} \geqq \tau_k,$$

mais comme A est situé sur la surface même de la shpère (T_k), on a $\tau_k = 0$, on a donc $\tau_1 \geqq 0$, c'est-à-dire que le sommet A n'est pas intérieur à la sphère (T_1).

Et le lemme est démontré.

Nous allons appliquer ce lemme à la théorie des systèmes parallélépipédaux de points.

§ 2. **Les tétraèdres L des systèmes parallélépipédaux E.** Soit E un système parallélepipédal de points à n dimensions. Il est facile de voir que le rayon de la sphère vide dans E est limité, par exemple, il ne peut pas être plus grand que la moitié de la plus grande diagonale du parallélepipède fondamental de E auquel appartient son centre. Si une sphère vide dans E n'a pas de points de E sur sa surface, son rayon peut être augmenté. Il peut aussi être augmenté si la sphère vide possède des points de E sur sa surface, mais ces points sont tous situés dans un «plan» à moins de n dimensions, par exemple cela peut être fait, si l'on éloigne le centre de la sphère de ce plan. Il s'en suit qu'il doit exister dans E des sphères vides, qui ont sur leur surface un groupe n-dimensional de $n+1$ points de E. Nous allons nommer une sphère vide dans E, qui possède un groupe n-dimensional de points de L sur sa surface, une sphère (L) et un tétraèdre constitué par un groupe n-dimensional de $n+1$ de tels points un tétraèdre L de E. Il est évident qu'il n'y a qu'un nombre limité de tétraèdres L non homologues, c'ést-à-dire qui ne s'obtiennent pas l'un de l'autre par une translation le long d'un vecteur de E,

parce qu'on peut supposer que tous ces tétraèdres L ont le point O de E pour point commun, et alors tous les sommets de ces tétraèdres sont des points de E situés à l'intérieur d'une sphère ayant le centre dans le point O et dont le rayon est supérieur au plus grand diamètre que peut avoir une sphère vide dans E.

§ 3. **Sur les systèmes parallélépipédaux spéciaux.** Il peut arriver qu'il existe des sphères vides dans E qui ont un groupe n-dimensional de plus que $n+1$ points de E sur leur surface. Nous nommerons «spécial» un système E pour lequel cela a lieu.

Proposition 1: *Si le système, E est spécial on peut toujours faire une telle transformation affine infiniment petite de l'espace après laquelle le système E devient non spécial.*

Démonstration. Soient α_{ij} les coefficients d'une transformation affine S de notre espace à n dimensions. Considérons un groupe n-dimensional de $n+2$ points consphériques, c'est-à-dire situés sur la surface d'une même sphère. Si nous écrivons l'équation que remplissent dans ce cas les coordonnées de ces points, et que nous produisons la transformation S dans cette équation, nous obtenons une équation $\varphi(\alpha_{ij})=0$ entre les coefficients α_{ij} de la transformation S, qui doit être satisfaite, si les $n+2$ points restent consphériques après la transformation S. Cette équation algébrique ne peut pas être remplie identiquement, puisque autrement une transformation affine tout à fait arbitraire n'altérerait pas la consphéricité des $n+2$ points considérés, ce qui est, comme il est facile de voir, impossible. Considérons maintenant tous les groupes n-dimensionaux de $n+2$ points de E, les points de chacun desquels sont situés sur une même sphère vide de E, et qui ont tous le point O pour point commun. Il ne peut avoir, comme nous l'avons vu, qu'un nombre k limité de tels groupes différents. Soient $\varphi_1(\alpha_{ij})=0$, $\varphi_2(\alpha_{ij})=0, \ldots . \varphi_k(\alpha_{ij})=0$ les équations envisagées pour tous ces groupes. Comme aucune de ces équations algébriques n'est remplie identiqement, on peut, comme il est connu, toujours trouver autant qu'on veut de systèmes de valeurs des α_{ij} aussi peu différents d'un système donné que l'on veut, pour lesquels aucune de ces équations ne soit remplie. En considérant ceux de ces systèmes qui diffèrent peu du système $\alpha_{11}=\alpha_{22}=\ldots=1$; $\alpha_{ij}=0$ (si $i\neq j$), nous obtenons la transformation S indiquée dans la proposition. (Cette rédaction de la démonstration de la 1-ère proposition a été obtenue dans un entretien avec V. Tartakowski et O. Jitomirski).

Nous pouvons donc étudier seulement les systèmes non spéciaux et envisager les systèmes spéciaux comme leurs cas limites. Dans ce qui suit le système E sera toujours supposé non special.

§ 4. **La partition de l'espace en tétraèdres L pour un système non spécial.** Proposition II. *Les tétraèdres L de E partagent uniformément tout l'espace à n dimensions et sont contigus par des faces entières.* En effet: 1° soit σ une

face à $n-1$ dimensions d'un tétraèdre L; si nous déplaçons le centre de la sphère vide circonscrite à ce tétraèdre perpendiculairement à cette face, en variant son rayon de la sorte qu'elle passe toujours par les points de E, qui sont les n sommets de cette face, elle quittera le sommet du tétraèdre L, opposé à cette face et elle se heurtera finalement à un point quelconque de E, situé du côté opposé de cette face. Ce nouveau point forme avec la face σ un nouveau tétraèdre L adjacent à L par la face σ; 2° il est évident que si les sphères circonscrites à deux tétraèdres L_1 et L_2 n'ont pas de points communs ou bien se touchent seulement, alors les tétraèdres L_1 et L_2 n'ont pas de points communs intérieurs, et dans le cas que ces sphères se coupent, les tétraèdres L_1 et L_2 ont leurs sommets sur les segments de leurs sphères, qui sont situés de côtés opposés du «plan» mené par le «cercle» d'intersection de ces sphères ou bien sur ce «cercle» même, car autrement ce sphères ne seraient pas vides, parce que les autres segments sont intérieurs aux sphères correspondantes; deux tétraèdres L ne peuvent donc pas avoir des points communs intérieurs.

§ 5. **Les domaines D.** Envisageons le domaine D_0 de tous les points de l'espace, chacun desquels n'est pas plus loin du point O de E que de tout autre point de E. Il est évident que D_0 est un polyèdre convexe, parce qu'on peut l'obtenir par exemple en réunissant le point O à tous les points de E par des segments droits et en menant par les milieux de ces segments des «plans» qui leurs sont perpendiculaires, alors le domaine D_0 sera la partie de l'espace, située à l'intérieur de tous ces plans, c'est-à-dire du même côté de ces plans où est le point O. Les domaines D construits pour les autres points de E sont égaux à D_0 et lui sont parallèles. Les polyèdres D partagent uniformément l'espace à n dimensions, puisque chaque point de l'espace n'est aumoins d'un des points de E pas plus loin que de tout autre point de E, et qu'il ne peut exister de tels points qui soient plus près de deux points de E à la fois de l'un que de l'autre. Les polyèdres D sont contigus par des faces entières. En effet, si deux polyèdres D'' et D''' étaient contigus à un polyèdre D' par les parties d'une même face de D' à $n-1$ dimensions, alors leurs centres devraient être situés sur la perpendiculaire abaissée du centre de D' sur le plan de cette face, et par suite ils devraient coïncider, parce qu'autrement il ne pourrait pas être qu'un point commun au polyèdres D' et D''' soit à égale distance de leurs centres et que cela ait lieu en même temps pour les polyèdres D' et D'''.

Comme les D ont des centres de symétrie et sont égaux et paralleles, le milieu du segment, qui unit les centres de deux D, qui sont contigus par une face à $n-1$ dimensions, est le centre de cette face.

§ 6. **Les tétraèdres L et les domaines D d'un système C non spécial.** Il y a une correspondance bien simple entre les tétraèdres L et les domaines D dans le cas, quand le système E n'est pas spécial.

Proposition III: *Les tétraèdres L d'un système E non spécial sont corrélatifs aux sommets des polyèdres D de ce système.* En effet, chaque sommet d'un D appartient au moins à $n+1$ D différents dont les centres forment un groupe de points de E à n dimensions. Ce sommet est évidemment le centre d'une sphère vide passant par ces $n+1$ points de E, parce que si cette sphère n'etait pas vide, ce sommet serait plus près du point de E intérieur à cette sphère que des $n+1$ points de E mentionnés et ne pourrait pas appartenir à leurs domaines D. Le tétraèdre construit sur les $n+1$ centres des $n+1$ D, qui ont un sommet commun, est donc un tétraèdre L de E. On voit aussi que dans un système E non spécial tous les sommets des D sont «simples», c'est-à-dire qu'en chaque sommet sont contigus seulement $n+1$ domaines D. Voronoï nomme de tels sommets des sommets primitifs. Chaque sommet d'un D est donc corrélatif à un tétraèdre L, et inversement. Le groupe de tous les tétraèdres L, qui ont un sommet commun est corrélatif à un D de E. Si l'on connaît la partition de E en tétraèdres L, on connaît aussi la partition de l'espace en domaines D.

§ 7. **Le nombre des types topologiques des systèmes E à n dimensions est limité.**

Proposition IV: *Le nombre des faces à $n-1$ dimensions d'un D n'est pas plus grand que 2 (2^n-1).* Aucun point milieu entre deux points de E, c'est-à-dire dont les coordonnées par rapport au groupe de n vecteurs fondamentaux de E ont pour dénominateurs le nombre 2, ne peut être intérieur à un D. Cela suit immédiatement de la construction mentionnée de D au moyen des plans passant par les milieux des vecteurs de E. Il n'existe que 2^n-1 milieux entre les points de E qui ne soient pas homologues par rapport au groupe des translations de E. Si nous construisons en partant de chacun de ces 2^n-1 points un système égal et parallèle à E, il ne peut avoir dans chacun de ces systèmes deux points qui soient les centres de deux faces d'un D, qui ne soient pas symétriques au centre de ce D, parce qu'au cas contraire le milieu de ces deux points, toujours aussi le milieu entre deux points de E, serait en raison de la convexité de D un point intérieur de D sans être son centre. Cela démontre la proposition. (Théorème de Minkowski).

Proposition V: *Le nombre de types topologiques différents possibles d'un domaine D d'un système parallélépipédal à n dimensions est limité.* Cela suit du fait qu'en général le nombre des types topologiques de polyèdres convexes à n dimensions ayant un nombre limité k de faces à $n-1$ dimensions est limité. En effet, le nombre des faces à $n-2$ dimensions d'une face à $n-1$ dimensions d'un tel polyèdre ne peut pas être plus grand que $k-1$ (ce qui arrive seulement si le polyèdre est une «pyramide», et la face à $n-1$ dimensions en questions est la base de cette pyramide). Le nombre des faces à $n-3$ dimensions des faces à $n-2$ dimensions ne peut pas être plus grand que $k-2$, et ainsi de suite. Le nombre de leurs contiguités différentes est donc aussi limité.

Le type topologique du domaine D détermine le type topologique de la partition de E en tétraèdres L. Nous allons l'appeler — le type topologique de E.

§ 8. **Theorème fondamental.** *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un système de n vecteurs fondamentaux d'un système E parallélépipédal de points à n dimensions soit lié univoquement au domaine D de ce système, c'est-à-dire à ce système lui-même, est que les produits scalaires de ces vecteurs deux à deux, c'est-à-dire les coefficients de la forme quadratique correspondante au système de vecteurs mentionnés, suffisent à un nombre limité d'inégalités linéaires, qui sont déterminées par le type topologique du système E et par le caractère de liaison de ce système de vecteurs avec le domaine D, qui dépend de nos conventions.* Envisageons un système de n vecteurs fondamentaux de E qui soient lié d'une façon donnée avec le domaine D de E. Il n'y a qu'un nombre limité de paires non homologues de tétraèdres L de E contigus par des faces à $n-1$ dimensions.

Pour chaque telle paire de tetraèdres L le $n+1$-er sommet de l'un de ces tétraèdres de la paire n'est pas intérieur à la sphère circonscrite à l'autre de ces tétraèdres, et inversement, ce qui suit de la détermination même des tétraèdres L. Au contraire, si cela a lieu pour chaque paire de tetraèdres contigus par une face à $n-1$ dimensions, alors ce sont des tétraèdres L parce que selon le lemme général mis à la tête de ce mémoire, aucun sommet d'aucun de ces tétraèdres, c'est-à-dire aucun point du système E, n'est intérieur à aucune sphère circonscrite à un tel tétraèdre, c'est-à-dire que cette sphère est vide. Ces conditions sont donc nécessaires et suffisantes. Il ne reste qu'à les exprimer au moyen des coefficients de la forme quadratique positive

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) = \sum a_{ik} x_i x_k$$

correspondante au système fondamental choisi des n vecteurs de E.

Soient $x_i^{(1)}; x_i^{(2)}; \ldots x_i^{(n+1)}$ $(i = 1, 2 \ldots n)$ les coordonnées par raport à ce système de vecteurs des sommets du premier tétraèdre L_1 d'une telle paire de tétraèdres et $x_i^{(2)}; x_i^{(3)} \ldots x_i^{(n+1)}; x_i^{(n+2)}$ ceux des sommets du second L_2. Un calcul facile montre que la condition indiquée s'écrit ainsi:

$$\begin{vmatrix} f(x_i^{(1)}), & \frac{\partial f}{\partial x_1^{(1)}}, & \frac{\partial f}{\partial x_2^{(1)}}, \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n^{(1)}}, & 1 \\ f(x_i^{(2)}), & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & . \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & . \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & . \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & . \\ f(x_i^{(n+2)}), & \frac{\partial f}{\partial x_1^{(n+2)}}, & \frac{\partial f}{\partial x_2^{(n+2)}}, \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n^{(n+2)}}, & 1 \end{vmatrix} \geqq 0 \qquad (1)$$

En effet, si ξ_i sont les coordonnées du centre de la sphère (L_2) et r_2 son rayon, on a alors

$$f(x_i^{(m)} - \xi_i) = r_2^2 \quad (m = 2, 3 \ldots n+2)$$

ou bien

$$f(x_i^{(m)}) - \frac{\partial f}{\partial x_1^{(m)}} \cdot \xi_1 - \ldots - \frac{\partial f}{\partial x_n^{(m)}} \cdot \xi_n + f(\xi_i) - r_2^2 = 0,$$

et si t_i est un point sur (L_2) alors on a encore l'équation

$$f(t_i) - \frac{\partial f}{\partial t_1} \cdot \xi_1 - \ldots - \frac{\partial f}{\partial t_n} \cdot \xi_n + f(\xi_i) - r_2^2.$$

On obtient donc l'équation suivante de la sphère (L_2):

$$\begin{vmatrix} f(t_i), & \frac{\partial f}{\partial t_1}, \frac{\partial f}{\partial t_2}, \ldots\ldots\ldots \frac{\partial f}{\partial t_n}, & 1 \\ f(x_i^{(2)}), & \frac{\partial f}{\partial x_1^{(2)}}, \frac{\partial f}{\partial x_2^{(2)}}, \ldots\ldots \frac{\partial f}{\partial x_n^{(2)}}, & 1 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & . \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & . \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & . \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & . \\ f(x_i^{(n+2)}), & \frac{\partial f}{\partial x_1^{(n+2)}}, \frac{\partial f}{\partial x_2^{(n+2)}}, \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n^{(n+2)}}, & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2)$$

Si l'on numère les sommets de T_2 de manière que mineur de $f(t_i)$ dans (2) soit positif, on obtient la condition (1).

Le déterminant (1) peut facilement être transformé en le produit suivant:

$$(-1^n). \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots\ldots 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \ldots\ldots 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} a_{12} \ldots a_{1n} \\ \cdot & \cdot & a_{21} a_{22} \ldots a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \ldots\ldots\ldots \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots\ldots\ldots \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots\ldots\ldots \cdot \\ 0 & 0 & a_{n1} a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f(x_i^{(1)}), x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots\ldots x_n^{(1)}, & 1 \\ f(x_i^{(2)}), x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots\ldots x_n^{(2)}, & 1 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & . \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & . \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & . \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & . \\ f(x_i^{(n+2)}), x_1^{(n+2)}, x_2^{(n+2)}, \ldots x_n^{(n+2)}, & 1 \end{vmatrix} \geqq 0 \qquad (3)$$

Mais le premier déterminant est le discriminant de la forme positive $f(x_i)$, il est ici positif, la condition (1) se réduit donc à ce que le second déterminant

(3) ne soit pas négatif. En développant ce déterminant par la première colonne, on obtient l'inégalité:

$$\rho = (1)^n \sum a_{ik} \cdot \begin{vmatrix} x_i^{(1)} x_k^{(1)}, & x_1^{(1)}, \; x_2^{(1)} \ldots x_n^{(1)}, & 1 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ x_i^{(n+2)} x_k^{(n+2)}, & x_1^{(n+2)} x_2^{(n+2)} \ldots x_n^{(n+2)}, & 1 \end{vmatrix} \geqq 0 \qquad (4)$$

Soient $\rho_1, \; \rho_2 \ldots \rho_\varkappa$ les formes linéaires par rapport à a_{ik} (4) correspondantes à toutes les $\varkappa$ paires de tétraèdres non homologues mentionnées. Les conditions en question s'écrivent alors ainsi:

$$\rho_1 \geqq 0; \; \rho_2 \geqq 0; \ldots\ldots \rho_\varkappa \geqq 0.$$

Б. Н. ДЕЛОНЕ. О ПУСТОМ ШАРЕ

РЕЗЮМЕ

Знаменитая посмертная работа Вороного, помещенная в 134-м и 136-м томах Журнала Крелля, очень трудна для чтения. Даже Бахманн, включивший в свой компендиум все важнейшие русские работы по теории квадратичных форм, пишет, что он не решается излагать это трудное исследование.

Только-что исполнилось 25-летие со дня смерти Вороного. Я думаю, что лучшим способом почтить эту дату явилось бы опубликование исследований, продолжающих и упрощающих трудные исследования Вороного.

Настоящая работа содержит простой вывод теоремы указанного большого мемуара Вороного, которая в нем названа «фундаментальной». Оказывается, что эта теорема является непосредственным следствием одной совсем общей леммы, которая, может быть, найдет себе приложения и в анализе.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1934
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

О НЕКОТОРЫХ ФОРМУЛАХ СУММИРОВАНИЯ

А. И. ПОПОВА

(*Представлено академиком* И. М. Виноградовым)

В одной из моих работ, доложенной в заседании кафедры математики Ленингр. Машиностр. института в январе 1933 г. (печатается), был показан общий способ получения сумматорных строк из формул преобразования θ-рядов. Этим методом можно, между прочим, доказать такую формулу (знак ударения при сумме показывает, что последнее слагаемое взято с коэффициентом $\frac{1}{2}$):

$$\frac{\pi^{\nu-\frac{\alpha}{2}}}{\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha}{2}+1\right)}\cdot\left[x^{\nu-\frac{\alpha}{2}}+\sum_{n\leqslant x}{}'N_\alpha(n)(x-n)^{\nu-\frac{\alpha}{2}}\right]=$$

$$(1)\qquad =\frac{\pi^\nu x^\nu}{\Gamma(\nu+1)}+x^{\frac{\nu}{2}}\sum_1^\infty N_\alpha(n)\frac{J_\nu(2\pi\sqrt{nx})}{n^{\frac{\nu}{2}}};$$

здесь $R(\nu)>R\left(\frac{\alpha}{2}\right)-1$, $J_\nu(z)$ функция Бесселя, а $N_\alpha(n)$ определяется, при любом вещественном или комплексном α, равенством:

$$\left(1+2\sum_1^\infty x^{n^2}\right)^\alpha=1+\sum_1^\infty N_\alpha(n)\,x^n.$$

Мы будем рассматривать здесь тот случай, когда $R(\alpha)>0$, и укажем несколько относящихся сюда любопытных формул.

При $\nu=\frac{\alpha}{2}$ из (1) вытекает

$$(2)\qquad 1+\sum_{n\leqslant x}{}'N_{2\nu}(n)=\frac{\pi^\nu x^\nu}{\Gamma(\nu+1)}+x^{\frac{\nu}{2}}\sum_1^\infty N_{2\nu}(n)\frac{J_\nu(2\pi\sqrt{nx})}{n^{\frac{\nu}{2}}},$$

а из последнего непосредственно получается общая формула суммирования, один частный вид которой есть

$$\lim_{x=0}\frac{f(x)}{x^{\frac{\nu-1}{2}}}+\sum_{n=1}^\infty\frac{N_{2\nu}(n)}{n^{\frac{\nu-1}{2}}}f(n)=\frac{\pi^\nu}{\Gamma(\nu)}\int_0^\infty x^{\frac{\nu-1}{2}}f(x)\,dx$$

$$(3)\qquad +\pi\sum_{n=1}^\infty\frac{N_{2\nu}(n)}{n^{\frac{\nu-1}{2}}}\int_0^\infty f(x)\,J_{\nu-1}\left(2\pi\sqrt{nx}\right)dx,$$

где $R(\nu) > 0$, $\lim\limits_{x=0} \frac{f(x)}{x^{\frac{\nu-1}{2}}}$ существует, а $f(x)$ функция, удовлетворяющая условиям, аналогичным условиям Дирихле, достаточным для разложения в тригонометрический ряд, так что $f(x)$, в сущности, есть $\frac{f(x+0)+(x-0)}{2}$.

Положим в формуле (3)

$$f(x) = J_{\nu-1}\left(2\pi\sqrt{zx}\right)e^{-\pi tx}, \tag{4}$$

где $R(t) > 0$; тогда, пользуясь видоизмененной формой одного интеграла, данного Н. Я. Сониным, именно,

$$\int_0^\infty J_p\left(2\pi\sqrt{zx}\right)\cdot J_\mu\left(2\pi\sqrt{nx}\right)\cdot e^{-\pi tx}\cdot dx = \frac{e^{-\pi\frac{n+z}{t}}}{\pi t}\cdot I_\mu\left(\frac{2\pi\sqrt{nz}}{t}\right), \tag{5}$$

где $I_\mu(x)$ есть та же Бесселева функция мнимого аргумента, найдем:

$$\frac{\pi^{\nu-1}Z^{\frac{\nu-1}{2}}}{\Gamma(\nu)} + \sum_{n=1}^{\infty} N_{2\nu}(n)\frac{J_{\nu-1}\left(2\pi\sqrt{nz}\right)}{n^{\frac{\nu-1}{2}}}e^{-\pi nt} = \tag{6}$$

$$= \frac{e^{-\frac{\pi z}{t}}}{t}\cdot\left[\frac{\pi^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}\cdot\frac{z^{\frac{\nu-1}{2}}}{t^{\nu-1}} + \sum_{n=1}^{\infty} N_{2\nu}(n)\frac{I_{\nu-1}\left(\frac{2\pi\sqrt{nz}}{t}\right)}{n^{\frac{\nu-1}{2}}}e^{-\frac{\pi n}{t}}\right].$$

Особенно интересны те частные значения числа ν, когда вопрос приводится к известным арифметическим функциям; так $N_2(n)$ есть, вообще учетверенная разность между числом делителей n вида $4k+1$ и $4k-1$; $N_8(n)$ равняется шестнадцать раз взятому абсолютному значению разности между суммами кубов четных и нечетных делителей n и т. д.

Из (6) получается много интересных частных рядов, напр.:

$$1 + \sum_1^\infty N_2(n) I_0\left(2\pi\sqrt{nx}\right)e^{-n\pi} = e^{\pi x}\cdot\left[1 + \sum_1^\infty N_2(n) J_0\left(2\pi\sqrt{nx}\right)e^{-n\pi}\right] \tag{7}$$

и т. п. Такими рядами занимался, между прочим, Ramanujan; мы можем дать их неограниченное число и с самыми разнообразными коэффициентами. Формула (6), очевидно, является обобщением формул преобразования θ-функций; можно указать и другие формы подобных обобщений; к ним и их следствиям мы впоследствии вернемся.

Ноябрь 1933 г.

Ленинградский машиностроительный институт.

A. POPOV. ÜBER EINIGE SUMMATIONSFORMELN

ZUSAMMENFASSUNG

Verfasser behandelt die die Besselschen Funktionen enthaltenden Summationsformeln (3) und die daraus folgenden Transformationsformeln der Reihen (6), welche den Transformationsformeln der θ-Reihen analog sind.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1934
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

ВЫВОД ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ НЕНОРМАЛЬНЫХ ПАРАЛЛЕЛОЭДРОВ

А. Д. АЛЕКСАНДРОВА

(*Представлено академиком* И. М. Виноградовым)

Можно различать два вида разбиений пространства на выпуклые, попарно гомотетичные и ограниченных снизу диаметров части — параллелоэдры: нормальные разбиения, при которых все параллелоэдры соприкасаются по целым граням, и ненормальные, при которых этого нет, так что параллелоэдры, на которые разбито пространство, могут быть и не равными. Задача отыскания всех топологически различных нормальных разбиений четырехмерного пространства была решена Б. Н. Делоне в его мемуаре «Sur la partition régulière de l'espace à 4 dimensions».[1] В настоящей работе, являющейся, так сказать, продолжением этого мемуара, дается вывод четырехмерных ненормальных параллелоэдров.

1. Из требования выпуклости очевидно, что параллелоэдры являются многогранниками и что каждой трехмерной грани P параллелоэдра соответствует параллельная ей грань $-P$ с противоположным направлением внешней нормали. Объемы граней P и $-P$ равны. Если бы отношение их объемов было $k \neq 1$, то внутри шара, столь большого, что сумма объемов граней P и $-P$ параллелоэдров, разрезаемых его поверхностью, исчезающе мала по сравнению с суммой объемов тех же граней параллелоэдров, лежащих внутри него, отношение сумм объемов граней P и $-P$ было бы сколь угодно близко к $k \neq 1$, и, следовательно, сколь угодно большой объем одних из этих граней оставался бы непокрытым другими.

Отсюда, на основании известной теоремы Минковского о выпуклых многогранниках, следует, что *параллелоэдры имеют центры симметрии*.[2]

2. Трехмерные грани параллелоэдров ограничены двухмерными гранями. Первые я буду называть просто гранями, вторые — фацетами. Фацету

[1] Изв. Акад. Наук СССР, 1929. О ненормальных параллелоэдрах см. B. Delaunay. Sur la généralisation de la théorie des parallélòèdres. Изв. Акад. Наук СССР, 1933.

[2] H. Minkowski. Allgemeine Lehrsätze über die konvexen Polyeder. Ges. Abh., II, p. 103.

грани $-P$, симметричную через центр параллелоэдра фацете p грани P, я буду обозначать $-p$. Каждой фацете p грани P соответствует на той же грани параллельная ей фацета p'. Действительно, если фацета p грани P покрыта, хотя бы отчасти, какой-нибудь фацетой $-p'$ грани $-P$ другого параллелоэдра, покрывающей P, то фацета p', принадлежа грани P, будет параллельна фацете p. Если через фацету p грани P_1 параллелоэдра Π_1 выступает покрывающая P_1 грань $-P_2$ параллелоэдра Π_2, то к Π_1 по фацете p прилегает гранью P_3 параллелоэдр Π_3. Фацета p' этой грани P_3, прилегающая к фацете p, будет параллельна p.

(Грани и фацеты, для которых мы хотим подчеркнуть их принадлежность к определенному параллелоэдру Π_1; Π_2, и. т. д., из дающих данное разбиение пространства, мы отмечаем индексом, которым отмечен соответствующий параллелоэдр. Если же мы рассматриваем грань, или фацету, или ребра как принадлежащие какому-то многограннику, подобному рассматриваемым параллелоэдрам, как принадлежащие любому из параллелоэдров, дающих данное разбиение пространства, то мы обозначаем их буквами, не отмеченными никакими индексами.)

Докажем, что площади $S(p)$ и $S(p')$ фацет p и p' равны. Возможны три случая налегания фацет p, p', $-p$, $-p'$ граней P и $-P$ друг на друга. 1) Часть фацеты p_1 грани P_1 одного параллелоэдра, через которую выступает грань $-P_2$ другого параллелоэдра, принадлежит фацете p_3' грани P_3 третьего параллелоэдра (или нескольким фацетам p' других параллелоэдров), так как выступающая из P_1 часть $-P_2$ должна быть целиком покрыта гранями P других параллелоэдров. 2) Часть фацеты p_1 грани P_1 одного параллелоэдра, через которую выступает грань Q_2 другого параллелоэдра, принадлежит фацете $-p_3'$ третьего параллелоэдра или нескольким фацетам $-p'$ граней $-P$ других параллелоэдров, так как через часть фацеты p грани P, через которую выступает уже грань Q, грани $-P$, покрывающие P, не могут выступать. 3) часть фацеты p_1 грани P_1, через которую не выступает никакая грань других параллелоэдров, принадлежит фацетам $-p'$ параллелоэдров, грани $-P$ которых налегает на P_1. Обозначая площади частей фацет в каждом из трех случаев через S_1, S_2, S_3 и замечая, что те же условия имеют место и для фацеты $-p$, мы можем написать ряд равенств частей площадей фацет:

$$S_1(p) = S_1(p'), \qquad S_1(-p) = S_1(-p'), \tag{1}$$

$$S_2(p) = S_2(-p'), \qquad S_2(-p) = S_2(p'), \tag{2}$$

$$S_3(p) = S_3(-p'), \qquad S_3(-p) = S_3(p'). \tag{3}$$

Площадь каждого куска каждой фацеты входит в эти равенства по одному разу.

Возьмем шар настолько большой, чтобы площадь рассматриваемых фацет параллелоэдров, разрезаемых его поверхностью, была исчезающе мала в сравнении с площадью тех же фацет параллелоэдров, лежащих внутри этого шара.

Заметим, что $S(p) = S(-p)$ и $S(p') = S(-p')$. Складывая равенства (1), (2), (3) для всех фацет p и $-p$ внутри взятого шара, получим, что удвоенная площадь всех фацет p будет относительно мало (при достаточно большом шаре) отличаться от удвоенной площади всех фацет p', так как на фацеты, принадлежащие параллелоэдрам, не лежащим внутри нашего шара, в равенствах (1), (2), (3) придется относительно исчезающе малая площадь. Но число фацет p у параллелоэдров, лежащих внутри шара, конечно то же, что и число фацет p'. Отсюда ясно, что $S(p) = S(p')$.

Отсюда, на основании уже упомянутой теоремы Минковского, следует, что *каждая грань параллелоэдра имеет центр симметрии* и что *симметричные грани P и $-P$ равны и параллельны.*

3. Я буду называть совокупность граней, прилегающих друг к другу по фацетам, равным и параллельным или симметричным данной, поясом граней. Грани P, Q, $-P$, $-Q$ образуют четырехгранный пояс, если Q, прилегая к P по фацете p, прилегает к $-P$ по фацете $-p'$, и, следовательно, $-Q$ прилегает к P и $-P$ по фацетам p' и $-p$. Между прочим, так как $-p'$ у p принадлежат Q, то они симметричны и имеют центры симметрии, значит равны и параллельны.

Если грань P параллелоэдра Π имеет внутри грани $-P$ другого параллелоэдра хотя бы часть фацеты p, то прилегающая к P по p грань Q образует вместе с P, $-P$, $-Q$ четырехгранный пояс. Если к параллелоэдру Π_1 прилегает другой Π_2 не по целой грани P_1, то хотя бы часть какой-нибудь фацеты грани P_1 или грани $-P_2$ будет лежать внутри, соответственно, грани $-P_2$ или P_1. Пусть то будет фацета p_1 грани P_1. Тогда к P_1 по p_1 прилегает своей фацетой p_3' грань P_3 параллелоэдра Π_3. Π_1 и Π_3 не входят друг в друга, и поэтому прилегающие к P_1 по p_1 и к P_3 по p_3' грани Q_1 и R_3 должны налегать друг на друга (хотя бы отчасти), так как иначе между ними образовывалось бы пространство (четырехмерный двугранный угол), не могущее быть заполненным никаким параллелоэдром, потому что он обязательно имеет грань P, параллельную куску фацеты, по которому соприкасаются Q_1 и R_3. Итак, R_3 есть просто $-Q_3$, и к P по фацетам p и $-p'$ прилегают грани Q и $-Q$ и в силу симметрии параллелоэдра они же прилегают по фацетам $-p'$ и $-p$ к грани $-P$, так что P, Q, $-P$, $-Q$ образуют четырехгранный пояс.

Отсюда между прочим очевидно, что *двухмерными ненормальными параллелоэдрами могут быть только параллелограммы* и что всякий трехмерный ненормальный параллелоэдр имеет замкнутую зону граней P, Q, $-P$, $-Q$ (эти грани имеют общие параллельные ребра, соответственно фацетам в случае четырехмерных параллелоэдров). Поэтому для нахождения топологических типов трехмерных ненормальных параллелоэдров можно, на основании общей леммы, которая будет доказана в пункте 6, воспользоваться слоевым построением

Б. Н. Делоне, которое без труда, совершенно аналогично тому, как это сделано в пункте 8 для четырехмерных параллелоэдров, дает, что *трехмерными ненормальными параллелоэдрами являются параллелепипеды и шестигранные призмы с центрами.*

4. *Если параллелоэдры, в данном разбиении пространства, имеют такую грань P, что каждая из ее фацет где-нибудь оказывается хотя бы отчасти внутри граней — P параллелоэдров, в том же разбиении пространства, то такие параллелоэдры суть призмы с трехмерным параллелоэдром в основании.*

Пусть P будет грань, обладающая указанным свойством, и пусть p и $\bar{p}$ будут две ее фацеты, смежные по ребру π. Грани Q и Q', прилегающие к P по p и $\bar{p}$, имеют общее ребро π. На основании только что доказанной леммы они имеют с $-P$ общие фацеты $-p'$ и $-\bar{p}'$, равные и параллельные фацетам p и $\bar{p}$, и имеющие общее ребро π', равное и параллельное ребру π (потому что P и $-P$ равны и параллельны). π' есть также общее ребро Q и Q'. А раз Q и Q' имеют два общих параллельных ребра, то они имеют общую фацету q, содержащую эти ребра. Если τ есть ребро фацеты p, смежное с π по вершине A, то фацета $\bar{q}$ грани Q', имеющая параллельные ребра τ и τ' (на гранях P и $-P$), имеет с фацетой q две общие вершины A и A' (на гранях P и $-P$), а следовательно и целое общее ребро. Переходя таким образом к новым ребрам фацеты p, а затем к другим фацетам и их ребрам, убедимся, что все грани, прилегающие к грани P, суть призмы, с фацетами граней P и $-P$ в основаниях, и что все боковые ребра этих граней равны и параллельны, так как они соединяют соответственные вершины равных и параллельных граней P и $-P$. Отсюда ясно, что рассматриваемый параллелоэдр — призма с основаниями P и $-P$.

Если рассечь четырехмерное пространство, заполненное такими параллелоэдрами, трехмерным пространством, параллельным их основаниям, то оно окажется разбитым на выпуклые, попарно гомотетичные куски, которые будут сечениями наших параллелоэдров, параллельными их основаниям. Следовательно, эти основания суть трехмерные параллелоэдры.

5. Если допустить, что параллелоэдры, в данном ненормальном разбиении пространства, не имеют такой грани P, каждая из фацет которой где-нибудь, хотя бы отчасти, лежит внутри граней $-P$ параллелоэдров, в том же разбиении пространства, то ясно, что *у P должна быть хотя бы одна фацета p, всюду покрываемая фацетами $-p'$ граней $-P$. Покажем, что в этом случае параллелоэдр имеет замкнутую призматическую зону*, т. е. в проекции, вдоль некоторого его ребра — ребра зоны, он представляет призму, все грани которой суть проекции его граней — граней зоны.

Фацеты p не могут быть везде покрыты каждая одной фацетой $-p'$, если только параллелоэдры хоть где-нибудь соприкасаются не по целым граням P и $-P$ (так как разбиение ненормальное, то такие грани есть). Значит где-

нибудь фацета p имеет внутри фацеты $-p'$ (или наоборот, что совершенно безразлично) хотя бы часть ребра π. Фацеты p, p', $-p$, $-p'$ играют для нас совершенно одинаковую роль, так как для того, чтобы грани, прилегающие по ним друг к другу, образовывали четырехгранный пояс, достаточно, чтобы хотя часть одной из этих фацет оказывалась внутри какой-нибудь грани параллелоэдров. Поэтому фацеты $-p'$ также должны быть всюду покрыты фацетами p. Отсюда следует, что если p_1 имеет внутри $-p_2'$ часть ребра π_1, то к ней по этому ребру прилегает фацета другого параллелоэдра p_3, налегающая на $-p_2'$. Грани P_1 и P_3, которым принадлежат фацеты p_1 и p_3, входят в грань $-P_2$ и имеют на ее фацете $-p_2'$ общее ребро π_1. Если бы по этому ребру к фацетам p_1 и p_3 прилегали не налегающие хотя бы отчасти друг на друга фацеты q_1 и r_3, то между их плоскостями внутри $-P_2$ образовалось бы пространство, не могущее быть заполненным никакой гранью P, потому что P имеет фацету p, параллельную ребру π_1. (Грани P выпуклы и не входят друг в друга!) Итак r_3 есть не что иное, как q_3'. К фацете p по параллельным ребрам прилегают фацеты q и q', и так как грань P, имеющая эти фацеты, имеет центр симметрии, то те же фацеты прилегают к фацете p', так что фацеты p, q, p', q' образуют замкнутый пояс.

Так как хотя бы часть ребра π лежит внутри $-p'$, то значит хотя бы часть фацеты q грани P лежит внутри $-P$. Поэтому к P по q прилегает такая грань Q, что P, Q, $-P$, $-Q$ образуют четырехгранный пояс. К P по фацете p прилегает грань P', у которой есть фацета p'', симметричная p, к P' по p'' прилегает грань P'', у которой есть фацета p''', симметричная p'' и т. д. Рассмотрим проекцию $\overline{\Pi}$ нашего параллелоэдра в трехмерное пространство вдоль направления ребра π. Проекция $\overline{P}$ грани P будет представлять параллелограмм, стороны которого $\overline{p}$, $\overline{p'}$, $\overline{q}$, $\overline{q'}$ будут проекциями фацет p, p', q, q'. Проекции $\overline{Q}$ и $-\overline{Q}$ граней Q и $-Q$ будут плоские, так как обе эти грани имеют ребра, параллельные π. $\overline{Q}$ и $-\overline{Q}$ параллельны и прилегают к $\overline{P}$ по $\overline{q}$ и $\overline{q'}$. К $\overline{P}$ по $\overline{p}$ будет прилегать проекция $\overline{P'}$ грани P'. Эта проекция также плоская, потому что P' имеет ребра, параллельные π (напр. ребра фацеты p). $\overline{P'}$ имеет сторону $\overline{p''}$, равную и параллельную $\overline{p}$, представляющую проекцию фацеты p''. В силу выпуклости $\overline{\Pi}$, $\overline{p''}$ должна лежать между плоскостями $\overline{Q}$ и $\overline{Q}$. Но она равна и параллельна $\overline{p}$, концы которых лежат на $\overline{Q}$ и $-\overline{Q}$, следовательно концы $\overline{p''}$ также лежат на $\overline{Q}$ и $-\overline{Q}$. Это значит, что $\overline{P'}$ является параллелограммом, две параллельные стороны которого принадлежат также $\overline{Q}$ и $-\overline{Q}$. Точно так же докажем, что проекция $\overline{P''}$ грани P'' будет параллелограммом, две стороны которого принадлежат: одна $\overline{Q}$, другая $-\overline{Q}$. Идя от P'' к грани, прилегающей к ней по фацете p''' и т. д., замкнем наконец полученную совокупность граней, вернувшись к P, и убедимся таким образом в том, что проекция рассматриваемого параллелоэдра вдоль π есть призма ($\overline{Q}$ и $-\overline{Q}$ ее основания), все грани которой

суть проекции граней этого параллелоэдра. Все вершины этой призмы суть проекции ребер, равных и параллельных π. Поэтому найденная нами замкнутая зона нигде не нулевой толщины, т. е. всякая прямая, параллельная ребру зоны и имеющая с данным параллелоэдром хотя бы одну общую точку, имеет с ним целый общий отрезок, в нашем случае не короче ребра π.

Прямая, параллельная ребру зоны, протыкающая параллелоэдр, или проходит только по одной из граней зоны, или, пройдя сквозь одну грань, не принадлежащую зоне, выйдет из параллелоэдра через другую грань, также не принадлежащую зоне. В соответствии с этим все грани параллелоэдра распадаются на грани зоны и грани двух симметричных друг другу «шапочек».

6. *Если параллелоэдр имеет замкнутую зону не нулевой толщины, то его шапочка находится слоевым построением.* (Эта теорема может быть доказана и для замкнутой зоны нулевой толщины, но рассматриваемая нами зона не нулевой толщины).

Пусть параллелоэдры Π_1 и Π_2 имеют общую часть их шапочек и пусть их зональные проекции (проекции вдоль ребра замкнутой зоны не нулевой толщины) налегают друг на друга, хотя бы отчасти, своими внутренними точками. Проткнем Π_1 и Π_2 прямой, параллельной ребру рассматриваемой зоны, так, чтобы она проходила через общую часть их шапочек. Будем двигать эту прямую параллельно самой себе так, чтобы она все время протыкала Π_1 и Π_2. В тот момент, когда она перестанет проходить через общую часть их шапочек, она должна будет пересечь какой-нибудь параллелоэдр Π_3, «лежащий между» Π_1 и Π_2 (считая вдоль по этой прямой). При этом, так как Π_3 имеет замкнутую зону не нулевой толщины, наша прямая получит с ним целый общий отрезок, часть которого будет принадлежать, например, Π_1, так что Π_1 и Π_3 будут иметь общий отрезок, параллельный ребру зоны и, вследствие их выпуклости, смогут быть разделены пространством, проходящим через него. Отсюда ясно, что никакой параллелоэдр вроде Π_3, хотя бы и отчасти, не может «лежать между» Π_1 и Π_2. Следовательно общая часть их зональных проекций есть проекция общей части их шапочек. Таким образом, для того, чтобы получить все возможные шапочки параллелоэдров с данной зональной проекцией, достаточно рассмотреть все возможные покрытия зональной проекции одного из них не входящими друг в друга зональными проекциями других. Найдя шапочки, тем самым найдем возможные топологические типы параллелоэдров. В этом и заключается слоевое построение Б. Н. Делоне.

7. Так как параллелоэдры выпуклы, то если два из них соприкасаются, то они могут быть разделены трехмерным пространством, заключающим общую часть их границ. Отсюда ясно, что зональные проекции двух параллелоэдров, имеющих общую часть ребра, фацеты или грани зоны, не налегают друг на друга. (Фацета зоны — фацета, параллельная ребру зоны).

Зональные проекции рассматриваемых нами параллелоэдров суть призмы, ребра которых суть проекции фацет зоны. Пусть $\overline{\Pi}_1$ зональная проекция параллелоэдра Π_1. Рассечем ее и зональные проекции $\overline{\Pi}_2, \overline{\Pi}_3, \ldots$ параллелоэдров, имеющих с Π_1 общую часть какой-нибудь из фацет зоны, проектирующейся в виде бокового ребра τ призмы $\overline{\Pi}_1$ плоскостью, параллельной основанию $\overline{\Pi}_1$ и пересекающей τ в точке, в которой с ним не соприкасается ни одно из оснований рассматриваемых зональных проекций $\overline{\Pi}_1, \overline{\Pi}_2, \overline{\Pi}_3, \ldots$ Сечения $\overline{\Pi}_1, \overline{\Pi}_2, \overline{\Pi}_3, \ldots$ этой плоскостью не входят друг в друга, выпуклы, попарно гомотетичны, имеют центры симметрии и целиком окружают точку, являющуюся сечением τ. Следовательно, эти сечения суть или параллелограммы или шестиугольники с центрами. Отсюда следует, что *проекции рассматриваемых нами параллелоэдров вдоль ребра замкнутой призматической зоны представляют или параллелепипеды или шестигранные призмы с центрами.*

8. Теперь остается выполнить слоевое построение. При этом нужно иметь в виду некоторые замечания.

Проекции граней шапочки параллелоэдра суть выпуклые многогранники. Проекции двух разных фацет одной и той же грани шапочки не могут лежать в одной плоскости, и, следовательно, часть грани проекции всякого параллелоэдра, прилегающего к данному по грани шапочки, падающая внутрь проекции этого «данного» параллелоэдра, есть проекция только одной фацеты или части одной фацеты. Действительно, если бы проекции двух фацет одной грани лежали бы в одной плоскости, то это значило бы, что эта грань параллельна направлению проектирования, что может быть только тогда, когда она — грань зоны.

Зональные проекции $\overline{\Pi}_1$ и $\overline{\Pi}_2$ (шестигранные призмы или параллелепипеды) двух прилегающих друг к другу по граням P_1 и $-P_2$ (соответственно) их шапочек параллелоэдров входят друг в друга. Положим, что Π_1 больше Π_2. Тогда $\overline{\Pi}_1$ покрывает в $\overline{\Pi}_2$ относительно больший кусок, чем $\overline{\Pi}_2$ в $\overline{\Pi}_1$. А так как общая часть $\overline{\Pi}_1$ и $\overline{\Pi}_2$ есть часть граней P_1 и $-P_2$, и грани P и $-P$ равны и параллельны, то значит в проекцию $\overline{\Pi}_1$ должны входить еще проекции $\overline{\Pi}_3, \overline{\Pi}_4, \ldots$ так, что общая часть их с $\overline{\Pi}_1$ должна вместе с общей частью $\overline{\Pi}_1$ и $\overline{\Pi}_2$ давать проекцию всей грани P_1. Очевидные рассуждения приводят к тому, что это возможно тогда и только тогда, когда вся проекция $\overline{\Pi}_1$ принадлежит проекции одной грани шапочки, т. е. тогда, когда рассматриваемый параллелоэдр или четырехмерный параллелепипед (если $\overline{\Pi}_1$ параллелепипед) или призма с трехмерной шестигранной призмой в основании (если $\overline{\Pi}_1$ шестигранная призма).

Остается рассмотреть все возможные покрытия зональной проекции данного параллелоэдра не входящими друг в друга зональными проекциями равных ему параллелоэдров. Все возможные такие покрытия можно получить, если принять во внимание, что 1) сечение шестигранной призмы с центром плоскостью, параллельной ее основанию, может быть покрыто такими же не налегающими друг на

друга сечениями четырьмя существенно различными способами (см. упомянутый мемуар Б. Н. Делоне, стр. 87); 2) сечение параллелепипеда, параллельное его грани, может быть покрыто такими же не налегающими друг на друга сечениями пятью различными способами (три из них см. там же, четвертый и пятый получаются, если покрывающие сечения прилегают друг к другу не по целым сторонам). (Всюду речь идет, конечно, о параллельно расположенных сечениях); 3) плоскости оснований зональных проекций, входящих в данную зональную проекцию $\overline{\Pi}$, могут совпадать или не совпадать как между собой, так и с плоскостями оснований $\overline{\Pi}$. Рассмотрев все возможные полученные таким образом налегания зональных проекций и воспользовавшись сделанными в начале этого пункта замечаниями, легко заключить, что все возможные зональные проекции рассматриваемых параллелоэдров могут иметь вид, представленный на чертеже, помещенном на стр. 161 II-й части мемуара Б. Н. Делоне.

Из этих 12 проекций проекции 1, 2, 3, 9 принадлежат параллелоэдрам, которые не могут быть ненормальными. Действительно, из чертежей видно, что они получаются тогда и только тогда, когда параллелоэдры, имеющие с данным общие грани шапочки, прилегают к нему по целым граням и друг к другу по целым граням зоны, а в ненормальном разбиении должно быть такое место, где этого нет.

Проекции 6 и 10 так же, как 8 и 11, суть разные проекции параллелоэдров одного и того же габитуса. Проекции 5, 6, (10), 7, 8, (11), 12 принадлежат призмам с трехмерными параллелоэдрами в основаниях. Эти призмы могут заполнять пространство, будучи неравными. Для того, чтобы убедиться в этом, можно разбить все четырехмерное пространство на слои разных толщин параллельными трехмерными пространствами, после чего каждый такой слой можно разбить на равные призмы с трехмерными параллелоэдрами в основаниях. То обстоятельство, что в разных предположениях пунктов 4 и 5 мы получили призмы с трехмерными параллелоэдрами в основаниях, объясняется тем, что такие призмы могут заполнять пространство, будучи сдвинутыми друг относительно друга, существенно различными способами. Все эти призмы могут давать нормальные разбиения четырехмерного пространства; в таблице нормальных четырехмерных параллелоэдров на стр. 162 части II мемуара Б. Н. Делоне они помещены под номерами 8, 13, 15, 17, 18.

Проекция 4 принадлежит многограннику, ограниченному 12 шестигранными призмами, которые распадаются по двум шестигранным поясам. Грани каждого такого пояса прилегают друг к другу по равным и параллельным шестиугольным фацетам, так что все грани каждого такого пояса параллельны одной плоскости. Если под призмой понимать многогранник, все грани которого распадаются на две совокупности такие, что грани этих совокупностей параллельны двум линейным пространствам (прямой, плоскости и т. п.), имеющим

только одну общую точку, и таким, что минимальное заключающее их пространство и будет пространством многогранника, то можно сказать, что рассматриваемый нами параллелоэдр — призма.

Параллелоэдры такого габитуса не могут заполнять пространство, будучи неравными. Действительно, предположим, что где-то на одну из граней P такого параллелоэдра Π налегает грань — P параллелоэдра большего Π. Тогда грань P будет заключать хотя бы часть одной из своих шестиугольных фацет P внутри — P, откуда по пункту 4 следует, что по p к P прилегает Q такая, что P, Q, — P, — Q образуют четырехгранный пояс. Но грани, прилегающие по шестиугольным фацетам, образуют шестигранные пояса. Это противоречие убеждает нас в справедливости сделанного утверждения.

Рассматриваемый параллелоэдр может давать нормальное разбиение пространства; в упомянутой выше таблице Б. Н. Делоне он указан под номером 16. Пусть пространство нормально разбито на такие параллелоэдры. Выделим из всех параллелоэдров совокупность параллелоэдров, прилегающих друг к другу по граням одного шестигранного пояса. Выделенная совокупность будет ограничена только гранями, принадлежащими другому шестигранному поясу всех входящих в нее параллелоэдров. Эти грани параллельны одной плоскости, поэтому при движении вдоль этой плоскости рассматриваемая совокупность параллелоэдров будет перемещаться сама в себе, так что ее параллелоэдры не будут при этом входить в другие, и разбиение пространства не будет нарушаться. Из этих рассуждений ясно, каким образом рассматриваемые параллелоэдры могут осуществлять ненормальное разбиение четырехмерного пространства.

Итак, мы пришли к окончательному результату: *Существует 6 и только 6 топологически различных четырехмерных ненормальных параллелоэдров; 5 из них, являющиеся призмами с трехмерными параллелоэдрами в основаниях, могут заполнять пространство, будучи неравными; шестой, также являющийся в известном смысле призмой, не может давать такого разбиения пространства. Все эти параллелоэдры могут также разбивать четырехмерное пространство нормально.*

Дополнение

Об областях Дирихле с автоморфизмами

1. Мы будем обозначать рассматриваемое нами n-мерное пространство через R_n, а какое-нибудь заключающееся в нем m-мерное линейное пространство через R_m. m-мерный выпуклый многогранник мы будем обозначать Π_m, или D_m. $(m-1)$-мерные грани Π_m я называю просто гранями. Пусть все грани многогранника Π_n распадаются на две совокупности, грани одной из них параллельны R_m, грани другой параллельны R_k. Пространства R_m и R_k не имеют общих векторов и определяют все R_n, так что в смысле сложения векторов, проведенных из

общей точки пространств, R_m и R_k, $R_n = R_m + R_k$. Пересечем Π_n пространством R_m', параллельным R_m. Полученный в сечении многогранник будет ограничен только пересечениями R_m' с гранями Π_n, параллельными R_k, так как остальные грани параллельны R_m'. Будем двигать R_m' параллельно самому себе так, чтобы оно не переставало пересекаться с Π_n. Сечение Π_n пространством R_m' при этом не будет меняться, так как всякое параллельное движение R_m' можно представить происходящим вдоль R_k, которому параллельны те грани Π_n, сечения которых ограничивают сечение Π_n. Заменяя движение R_m' движением Π_n вдоль R_k, видим, что грани, параллельные R_k, при этом не выходят из тех $(n-1)$-мерных пространств, в которых они лежат, а именно пересечения этих пространств с R_m' и ограничивают сечение Π_n, которое таким образом действительно не меняется при параллельном движении R_m'.

Раз сечения Π_m и Π_k многогранника Π_n не изменяются при параллельных движениях пространств R_m' и R_k', пересекающих Π_n по Π_m и Π_k, то Π_n может быть получен, если какую-нибудь точку Π_m двигать по всему Π_k; Π_m, двигаясь параллельно самому себе, зачертит при этом весь многогранник Π_n. Π_m и Π_k можно в этом процессе поменять ролями. Если рассматривать многогранник как множество концов векторов, проведенных из некоторого начала во все его точки, то, обозначая множество таких векторов так же, как и соответствующий многогранник, можно указанное получение многогранника Π_n из многогранников Π_m и Π_k выразить формулой $\Pi_n = \Pi_m + \Pi_k$, т. е. все вектора Π_n получаются, если к каждому вектору Π_m прибавить все вектора Π_k.

Если Π_n получается при движении Π_m параллельно самому себе, так что данная точка Π_m проходит все точки Π_k, то грани Π_n получаются при этом так: 1) одни из граней Π_n зачерчиваются гранями Π_m, когда данная его точка проходит все точки Π_k; эти грани, следовательно, параллельны пространству R_k, в котором лежит Π_k; 2) другие грани Π_n зачерчиваются Π_m, когда данная его точка двигается только по всем точкам границы Π_k; эти грани, очевидно, параллельны пространству R_m, в котором лежит Π_m. Таким образом, если $\Pi_n = \Pi_m + \Pi_k$, то его грани распадаются на две совокупности, грани одной параллельны R_m, в котором лежит многогранник Π_m, грани другой параллельны R_k, в котором лежит многогранник Π_k. Многогранники, удовлетворяющие этим условиям, называются *призмами*. Если Π_m и Π_k в свою очередь являются призмами, то

$$\Pi_n = \Pi_{n_1} + \Pi_{n_2} \ldots + \Pi_{n_\nu} \; (n = n_1 + n_2 + \ldots + n_\nu).$$

2. Предположим, что призма $\Pi_n = \Pi_m + \Pi_k = \Pi_p + \Pi_q$, т. е. может быть представлена как «сумма» двух многогранников двумя различными способами. Грани Π_n распадаются, с одной стороны, на параллельные или R_m или R_k, а с другой на параллельные или R_p или R_q. Грани, параллельные R_m, не могут

быть все параллельны только R_p (или R_q), когда грани, параллельные R_k, параллельны только R_q (или R_p), потому что в этом случае, как легко заключить, было бы $R_m = R_p$ и $R_k = R_q$, т. е. $\Pi_m = \Pi_p$ и $\Pi_k = \Pi_q$. Пусть грани, параллельные, скажем, R_m, распадаются на две совокупности: грани, параллельные вместе с тем и R_p, т. е. параллельные $R_m + R_p$, и грани, параллельные вместе с тем и R_q, т. е. параллельные $R_m + R_q$. Все рассматриваемые грани должны быть параллельны пересечению пространств $R_m + R_p$ и $R_m + R_q$, которое, таким образом, должно быть R_m. Если пересечение R_m и R_p будет R_s, а пересечение R_m и R_q — R_t, то $R_m + R_p = R_{m+p-s}$ и $R_m + R_q = R_{m+q-t}$. $R_p + R_q = R_n$, поэтому $R_n = R_{m+p-s} + R_{m+q-t} = R_{2m+(p+q)-(s+t)-m}$, так как пересечение R_{m+p-s} и R_{m+q-t} равно R_m. Так как $p + q = n$, то получаем $R_n = R_{n+m-(s+t)}$, откуда $s + t = m$, так что $R_s + R_t = R_m$, потому что R_s и R_t не имеют общих векторов.

Все грани Π_n могут быть разбиты на грани, параллельные и R_k и R_q (или R_p), т. е. параллельные $R_k + R_q$, и грани, параллельные или R_m (не параллельные R_k) или R_p (не параллельные R_q), т. е. параллельные пересечению R_m и R_p R_s. (Не трудно видеть, что можно считать $s \neq 0$). $(R_k + R_q) + R_s = R_n$, так как $R_n = R_m + R_k$, а $R_m = R_s + R_t$, где R_t содержится в R_q. $(R_k + R_q)$ и R_s имеют только одну общую точку. Таким образом (по пункту 1) сечения Π_n пространствами R_s' и $(R_k' + R_q')$, параллельными R_s, и $(R_k + R_q)$, не меняются при движении этих пространств. Сечение Π_n пространством R_s' будет сечением этим же пространством многогранников Π_m и Π_p (получающихся в сечении Π_n пространствами R_m' и R_p', параллельными R_m и R_p), которые, таким образом, в свою очередь, оказываются призмами. Отсюда следует, что представление призмы Π_n в виде «суммы» многогранников, не являющихся призмами (далее «не разложимых на слагаемые»), единственное.

3. Когда, при движении точки A многогранника Π_m по граням Π_k, Π_m зачерчивает грани Π_n, параллельные R_m, заключающему Π_m, грани Π_m зачерчивают $(n-2)$-мерные грани Π_n, общие граням, параллельным R_m и граням параллельным R_k, так как при движении A по Π_k грани Π_m зачерчивают грани Π_n, параллельные R_k. Следовательно, каждая грань $\Pi_n = \Pi_m + \Pi_k$, параллельная R_m, прилегает по $(n-2)$-мерной грани к каждой грани, параллельной R_k.

Вектор, проведенный из центра параллелоэдра в центр какой-нибудь его грани P или Q, я буду называть вектором этой грани и обозначать соответственно p или q. Если P, Q — P, — Q образуют четырехгранный пояс, то очевидно, что P параллельна q и Q параллельна p.

Если параллелоэдр Π_n призма, $\Pi_n = \Pi_m + \Pi_k$, то какие бы грани P,—параллельную R_m, и Q, параллельную R_k,—ни взять, P, Q,—P,—Q образуют четырехгранный пояс, так как, если P параллельно R_m, то и — P параллельно R_m, а мы только что показали, что всякая грань Q, параллельная R_k, прилегает по

$(n-2)$-мерным граням ко всем граням, параллельным R_m, т. е. в частности к P и $-P$.

Раз P, Q, $-P$, $-Q$ образуют четырехгранный пояс, то P параллельна q и Q параллельно p. Таким образом, все грани, параллельные R_m, параллельны каждая всем векторам граней, параллельных R_k, и наоборот. Отсюда следует, что вектора всех граней $\Pi_n = \Pi_m + \Pi_k$ распадаются по двум пространствам R_m и R_k, имеющим одну общую точку — центр Π_n, и сечения Π_n этими пространствами и суть Π_m и Π_k.

Можно доказать, что для того, чтобы параллелоэдр Π_n был призмой $\Pi_n = \Pi_{n_1} + \Pi_{n_2} + \ldots + \Pi_{n_\nu}$, необходимо и достаточно, чтобы вектора его граней распадались бы по ν пространствам R_{n_1}, R_{n_2}, $\ldots R_{n_\nu}$ не имеющим попарно общих векторов; в этих пространствах и лежат Π_{n_1}, Π_{n_2}, $\ldots \Pi_{n_\nu}$.

4. Пусть пространство нормально разбито на призматические параллелоэдры $\Pi_n = \Pi_m + \Pi_k$. Грани Π_n распадаются на две совокупности; грани одной параллельны векторам граней другой. Разобьем всю совокупность параллелоэдров на такие части, что в каждую часть войдут параллелоэдры, соприкасающиеся между собой по граням одной совокупности. Если это будут грани, вектора которых лежат в R_m, то центры таких параллелоэдров образуют m-мерную параллелепипедную систему, потому что вектора переносов из центра данного параллелоэдра в центр соседних с ним по граням равны удвоенным векторам этих граней. Каждая выбранная таким образом часть всей совокупности параллелоэдров будет ограничена только гранями, параллельными R_m, а следовательно при всяком перемещении, параллельном R_m, она будет оставаться сама в себе. Отсюда следует, что все параллероэдры, являющиеся призмами, могут давать ненормальные разбиения пространства. На основании этого можно утверждать, что найденные нами четырехмерные параллелоэдры и суть все четырехмерные параллелоэдры, являющиеся призмами.

5. Пусть пространство разбито на параллелоэдры $\Pi_n = \Pi_m + \Pi_k$. Так как сечение Π_n пространством R_m', параллельным пространству, заключающему Π_m, не зависит от положения R_m' (если только R_m' пересекает Π_n), то, пересекая всю совокупность наших параллелоэдров таким R_m', убедимся, что оно окажется разбитым на параллелоэдры Π_m. Следовательно, если $\Pi_n = \Pi_{n_1} + \Pi_{n_2} + \ldots + \Pi_{n_\nu}$ параллелоэдр, то Π_{n_1}, Π_{n_2}, $\ldots \Pi_{n_\nu}$ параллелоэдры.

Пусть пространство R_m разбито на параллелоэдры Π_m. Возьмем пространство R_k, имеющее с R_m одну общую точку A, и разобьем его на равные параллелоэдры Π_k. При движении A по одному из Π_m, Π_k будут зачерчивать параллелоэдры $\Pi_n = \Pi_m + \Pi_k$. При переходе от одного из Π_m к другому, не равному ему, нужно соответственно менять размеры Π_k. Таким образом, все пространство $R_n = R_m + R_k$ окажется разбитым на параллелоэдры $\Pi_n = \Pi_m + \Pi_k$.

Следовательно, мы можем найти все призматические параллелоэдры, «складывая» всевозможными способами параллелоэдры низших измерений. Мы нашли четырехмерные ненормальные параллелоэдры слоевым построением, пользуясь наличием у них замкнутой зоны. Можно доказать, что для того, чтобы $\Pi_n = \Pi_{n_1} + \Pi_{n_2} + \ldots + \Pi_{n_\nu}$ имел замкнутую зону [т. е., чтобы его проекция в некоторое $(n-1)$-мерное пространство имела бы своими $(n-2)$-мерными гранями только проекции его $(n-1)$-мерных граней], необходимо и достаточно, чтобы по крайней мере один из параллелоэдров $\Pi_{n_1}, \Pi_{n_2}, \ldots \Pi_{n_\nu}$ имел замкнутую зону.

6. Если параллелоэдр $\Pi_n = \Pi_{n_1} + \Pi_{n_2} + \ldots + \Pi_{n_\nu}$, то аффинным преобразованием можно сделать пространства $R_{n_1}, R_{n_2}, \ldots R_{n_\nu}$ заключающие $\Pi_{n_1}, \Pi_{n_2}, \ldots, \Pi_{n_\nu}$ взаимно ортогональными. Любая грань P, вектор p которой лежит в R_{n_1}, параллельна $R_{n_2} + \ldots + R_{n_\nu}$, так что она заключает $n_2 + \ldots + n_\nu$ линейно независимых векторов, ортогональных векторам R_{n_1}, а значит и его собственному вектору p. Для того, чтобы P была ортогональна p, необходимо и достаточно, чтобы в ней имелось еще $(n_1 - 1)$ векторов, линейно независимых между собой и с $n_2 + \ldots + n_\nu$, уже выбранными векторами. Эти вектора можно выбрать лежащими в той грани Π_{n_1}, которая получается как сечение P пространством R_{n_1}. Вектор этой грани совпадает с вектором p. Поэтому нужно сделать рассматриваемую грань Π_{n_1} ортогональной ее вектору.

Как известно, для того, чтобы параллелоэдр превратит в область Дирихле, нужно сделать все его грани ортогональными их векторам. На основании приведенных рассуждений заключаем, что для того, чтобы $\Pi_n = \Pi_{n_1} + \Pi_{n_2} + \ldots + \Pi_{n_\nu}$ мог быть превращен аффинным преобразованием в область Дирихле, необходимо и достаточно, чтобы $\Pi_{n_1}, \Pi_{n_2}, \ldots \Pi_{n_\nu}$ аффинно преобразовывались в области Дирихле. Отсюда и из предыдущего пункта следует, что если область Дирихле призма $D_n = D_{n_1} + D_{n_2} + \ldots + D_{n_\nu}$ то и $D_{n_1}, D_{n_2}, \ldots D_{n_\nu}$ области Дирихле.

7. Пусть область Дирихле $D_n = D_{n_1} + D_{n_2} + \ldots + D_{n_\nu}$. Произведем аффинное преобразование D_n, состоящее в одинаковом преобразовании подобия всех ее сечений, пространствами R_{n_1}', параллельными пространству, заключающему D_{n_1}. Легко видеть, что это соответствует тому, что мы строим новую область Дирихле не как сумму $D_{n_1}, D_{n_2}, \ldots D_{n_\nu}$, но вместо D_{n_1} берем подобную ей область Дирихле. Таким образом, мы видим, что область Дирихле $D_n = D_{n_1} + D_{n_\nu} \ldots + D_{n_\nu}$ может подвергаться аффинным преобразованиям, отличным от подобия, оставляющим ее областью Дирихле, т. е. она имеет автоморфизмы.

Пусть область Дирихле D_n имеет автоморфизмы. Подвергнем ее аффинитету, оставляющему ее областью Дирихле. При этом все вектора ее граней останутся ортогональными соответствующим граням. Как известно, вектор, остающийся после аффинитета ортогональным к $(n-1)$-мерному пространству, к ко-

торому он был ортогонален, является главной осью эллипсоида, в который в результате аффинитета переходит шар, для которого этот вектор является радиусом. Как известно далее, такие вектора, вдоль которых производятся одинаковые растяжения или сжатия, образуют подпространства данного пространства, и все такие подпространства, подвергающиеся разным преобразованиям подобия, взаимно ортогональны. Отсюда следует, что все вектора граней D_n распадаются по таким взаимно ортогональным пространством. Пусть то будут R_{n_1}, R_{n_2}, ... R_{n_ν}. Так как $R_{n_2} + \ldots + R_{n_\nu}$ ортогонально R_{n_1}, а грани, вектора которых лежат в R_{n_1} ортогональны своим векторам, то эти грани параллельны $R_{n_2} + \ldots$ $\ldots + R_{n_\nu}$. Точно так же грани, вектора которых лежат в $R_{n_2} + \ldots + R_{n_\nu}$, параллельны R_{n_1}. Следовательно D_n — призма.

Итак, для того, чтобы область Дирихле имела автоморфизмы, необходимо и достаточно, чтобы она была призмой. Если область Дирихле $D_n = D_{n_1} + D_{n_2} + \ldots + D_{n_\nu}$, и D_{n_1}, D_{n_2}, ... D_{n_ν} уже не являются призмами, то все ее автоморфизмы исчерпываются комбинациями аффинитетов, состоящих в преобразованиях подобия всех сечений D_n, равных и параллельных D_{n_1}, равных и параллельных D_{n_2}, и т. д. Отсутствие других автоморфизмов следует из единственности представления параллелоэдра, как «суммы» «не разложимых» параллелоэдров.

8. Пусть имеется n- мерная параллелепипедальная система T_n, и пусть ее область Дирихле $D_n = D_{n_1} + D_{n_2} + \ldots + D_{n_\nu}$. Каждый вектор системы T_n можно представить как сумму векторов, идущих из центра D_n через центры ее граней. Так как эти вектора распадаются по взаимно ортогональным пространствам R_{n_1}, R_{n_2} ... R_{n_ν}, то, следовательно, любой вектор системы T_n есть сумма векторов ее подсистем T_{n_1}, T_{n_2}, ... T_{n_ν}, лежащих в пространствах R_{n_1}, R_{n_2}, ... R_{n_ν}, так что в смысле сложения векторов, входящих в T_{n_1}, T_{n_2}, ... T_{n_ν}, $T_n = T_{n_1} + T_{n_2} + \ldots + T_{n_\nu}$.

Пусть наоборот $T_n = T_{n_1} + T_{n_2} + \ldots + T_{n_\nu}$ и пространства R_{n_1}, R_{n_2}, ... R_{n_ν}, заключающие T_{n_1}, T_{n_2}, ... T_{n_ν}, взаимно ортогональны. Будем находить область Дирихле D_n системы T_n построением $(n-1)$-мерных «плоскостей Вороного», т. е. проводя через середину каждого вектора T_n $(n-1)$-мерное пространство, ему ортогональное. $T_n = T_{n_1} + T_m$, где $T_m = T_{n_2} + \ldots + T_{n_\nu}$ лежит в $R_m = R_{n_2} + \ldots + R_{n_\nu}$, ортогональном R_{n_1}. Вектор t системы T_n, не лежащий ни в R_{n_1} ни в R_m, есть сумма векторов из T_{n_1} и T_m: $t = t_1 + t_2$. t_1 и t_2 взаимно перпендикулярны. Из элементарных свойств прямоугольника со сторонами t_1 и t_2 и диагональю t явствует, что «плоскости Вороного», проведенные через середину t_1 и t_2, проходят через середину t. Отсюда ясно, что D_n не может иметь граней, вектора которых не принадлежали бы T_{n_1} или $T_m = T_{n_2} + \ldots +$ $+ T_{n_\nu}$. Грани, вектора которых принадлежат T_{n_1}, параллельны T_m и наоборот, так что D_n призма. Сечение D_n пространством R_{n_1} будет областью Дирихле D_{n_1}, системы T_{n_1}. (На основании рассуждений предшествующих пунктов). Продолжая

эти рассуждения, убедимся, что $D_n = D_{n_1} + D_{n_2} + \ldots + D_{n_\nu}$. Итак, для того, чтобы параллелепипедальная система T_n представлялась как «сумма» взаимно ортогональных систем $T_n = T_{n_1} + T_{n_2} + \ldots + T_{n_\nu}$ необходимо и достаточно, чтобы ее область Дирихле D_n была «суммой» областей Дирихле этих систем $D_n = D_{n_1} + D_{n_2} + \ldots + D_{n_\nu}$. Единственность представления T_n как «суммы» взаимно ортогональных далее «не разложимых» систем $T_n = T_{n_1} + T_{n_2} + \ldots + T_{n_\nu}$ следует из единственности представления параллелоэдра как «суммы» «не разложимых» параллелоэдров.

A. ALEXANDROV. DÉDUCTION DES PARALLÉLOÈDRES NON NORMAUX À 4 DIMENSIONS

RÉSUMÉ

On peut distinguer deux partitions différentes de l'espace à 4 dimensions: les partitions normales où tous les parallélоèdres sont convexes, parallèles et égaux entre eux et sont contigus par des faces entières, et les partitions non normales oú il existe des parallélоèdres, qui sont contigus par les faces non entières, et même des parallélоèdres non égaux, mais homotétiques.

Dans l'ouvrage présent est donnée la déduction des parallélоèdres non normaux à 4 dimensions. Le résultat suivant est obtenu.

Il existe 6, et seulement 6, parallélоèdres non normaux topologiquement différents à 4 dimensions, 5 desquels sont des prismes dont les bases sont des parallélоèdres à 3 dimensions. Ils peuvent diviser l'espace s'ils ne sont pas égaux. Le sixième est limité par 12 prismes hexagonaux. Ces parallélоèdres peuvent diviser l'espace, seulement, s'ils sont égaux.

Tous ces parallélоèdres sont tous des parallélоèdres normaux prismatiques. Dans la table, qu'est donnée dans le mémoire de B. Delaunay «Sur la partition régulière de l'espace à 4 dimensions» (Bulletin de l'Académie des Sciences de l'URSS, 1929) ils ont les numéros suivants: cinq premiers №№ 8, 13, 15, 17, 18 et le sixième № 16.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1934
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

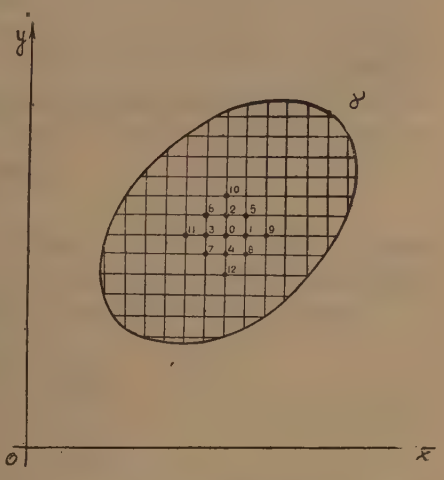
Отделение математических и естественных наук

О ЧИСЛЕННОМ ИНТЕГРИРОВАНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Ш. Е. МИКЕЛАДЗЕ

(Представлено академиком А. Н. Крыловым*)*

§ 1. **Введение.** Пусть u — функция от x и y. Проведем в плоскости xOy простой замкнутый * контур γ, и прямые параллельно координатным осям (фиг. 1). Часть плоскости, ограниченную этим контуром, будем называть областью A. С помощью наших построений получим сетку, которая разобьет область A с одной стороны на правильные части, состоящие из прямоугольников со сторонами параллельными осям Ox, Oy, с другой стороны — на неправильные части, получающиеся из тех прямоугольников, которые отчасти выступают за контур γ. Точки пересечения прямых будем называть точками сетки, из коих точки, лежащие на γ — граничными, а точки, лежащие внутри γ — внутренними точками сетки. ** Если прямые, параллельные осям Ox и Oy, отстоят друг от друга на постоянное расстояние h, сетку будем называть квадратной. Перенумеруем точки сетки в произвольном порядке от 0 до N. В дальнейшем, если рассматривается k-ая точка сетки, то через (x_k, y_k) будем обозначать координаты этой точки, а через u_k — численное значение u в этой же точке сетки.



Фиг. 1.

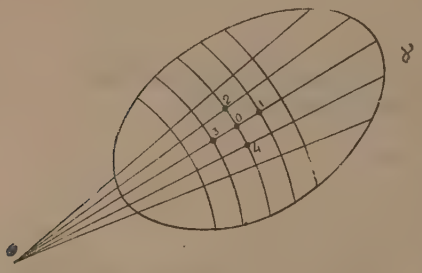
* Простым контуром мы называем контур, который не пересекает сам себя.

** Внутренние точки по возможности близкие к контуру γ, будут нами относиться к граничным точкам. При посредстве граничных точек мы можем начертить некоторую замкнутую ломаную, по возможности близкую к γ.

Часто численное интегрирование весьма упрощается, если преобразовать данное дифференциальное уравнение с помощью соотношения

$$x = f(u, v), \quad y = \psi(u, v),$$

а область A разбить на малые области двумя семействами кривых (u) и (v). В соответствии с этим, если, например, сделать переход от прямоугольных координат к полярным, прямоугольная сетка преобразуется в полярную сетку (фиг. 2)



Фиг. 2.

Рассмотрим некоторое дифференциальное уравнение с частными производными. Пусть граничные условия таковы, что наша проблема разрешима. Идея численного способа интегрирования данного уравнения заключается в установлении арифметического соотношения между значениями u в точках сетки* (на контуре и внутри контура) и в дальнейшем решении системы уравнений, доставляемых упомянутым соотношением. Идея эта принадлежит C. Runge.**

Методу интегрирования Runge развивает на примере

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = C, \tag{1}$$

определяя кручение цилиндрического стержня с крестообразным поперечным сечением при контурных условиях $u = 0$ на γ.

Полагая (для достаточно малых значений h),

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_1 - 2u_0 + u_3}{h^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{u_2 - 2u_0 + u_4}{h^2},$$

Runge заменяет уравнение (1) уравнением в конечных разностях

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 - 4u_0 = h^2 C, \tag{2}$$

где C постоянная, и тем самым вопрос численного интегрирования приводит к решению системы линейных уравнений вида (2) со многими неизвестными.

* Полагаем, что значения u в граничных точках нам известны. Иными словами нам известны значения функции u в точках, соединением которых можно образовать замкнутую ломанную по возможности близкую к γ. О погрешности см. § 4.

** Über eine Methode die partielle Differentialgleichung $\Delta u = \text{Constans}$ numerisch zu integrieren Ztschr. f. Math. u. Phys., Bd. 56, 1908, S. 225—232.

При сколько-нибудь значительном числе внутренних точек сетки, решение этих уравнений требует затраты большего труда. С целью упрощения решения в том частном случае, когда $C = 0$, H. Liebmann * выбирает приближенные значения u во внутренних точках сетки, учитывая граничные условия, и, далее, исходя из этих значений, при посредстве (2) вычисляет более точные значения.

Отсюда ясно, какую важную роль играет построение формул, подобных (2), с возможно большей степенью точности. Такие формулы будут способствовать с увеличением h уменьшению числа внутренних точек сетки, а тем самым сокращать число уравнений (2). Вопросу построения возможно точных формул в конечных разностях мы уделяем следующий параграф.

Рассматривая сетки, образованные правильными многоугольниками, С. А. Гершгорин ** показывает, что при численном интегрировании уравнения Пуассона, разные типы сеток доставляют результат различной степени точности, причем наибольшая степень — соответствует сеткам треугольного типа. Переходя к оценке погрешности, соответствующей различным сеткам, С. А. Гершгорин получает для четырехугольных сеток точность порядка h^2, а для сеток треугольнего типа — h^4. Мы имеем показать, что и для квадратных сеток точность решения есть порядка h^4.

L. F. Richardson в работе «The Approximate Arithmetical Solution by Finite Differences of Physical Problems involving Differential Equations with an Application to the Stresses in a Masonry Dam», *** пользуясь центрированными разностями Sheppard'a, полагает приближенно:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_1 - u_3}{2h}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_1 - 2u_0 + u_3}{h^2}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \approx \frac{u_9 - 2u_1 + 2u_3 - u_{11}}{2h^3}$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \approx \frac{u_9 - 4u_1 + 6u_0 - 4u_3 + u_{11}}{h^4}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} \approx \frac{u_5 + u_7 - u_6 + u_8}{4h^2},$$

. . . . . .

где h сторона клеточки.

* Die angenäherte Ermittelung harmonischer Funktionen und konformer Abbildungen. Sitzungsberichte der Bayer. Akad. der Wissenschaften, Math.-phys. Kl., 1918, S. 385—416.

** О приближенном интегрировании дифференциальных уравнений Лапласа и Пуассона. Изв. Ленингр. политехн. инст., т. XXX, 1927, стр. 75—94.

*** Philosoph. Trans. of the Roy. Soc. of London, ser. A, vol. 210, 1911, pp. 307—357.

Внося эти приближенные значения частных производных в данное дифференциальное уравнение, он тем самым преобразовывает его в уравнение в конечных разностях. Так, например, если рассмотреть уравнения

$$\Delta u = \varphi(x, y) \text{ и } \Delta\Delta u = \psi(x, y),$$

где Δ — оператор Лапласа, то первому из них будет соответствовать уравнение в конечных разностях

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 - 4u_0 = h^2 \varphi(x_0, y_0),$$

а второму —

$$20u_0 - 8[u_1 + u_2 + u_3 + u_4] + 2[u_5 + u_6 + u_7 + u_8] + \\ + [u_9 + u_{10} + u_{11} + u_{12}] = h^2 \psi(x_0, y_0).$$

Точки сетки, отвечающие этим уравнениям, показаны на фиг. 1.

Как видно, L. F. Richardson развивает, в сущности, методу C. Runge, хотя на Runge он не ссылается. *

Легко усмотреть непрактичность методы, когда, например, данное дифференциальное уравнение есть уравнение второй и выше степени относительно функции или ее производных. Арифметические соотношения, связывающие значения u в различных точках сетки не будут, линейными, а решение их представит непреодолимые трудности.

Из самых преобразований Richardson'a видно, что различным дифференциальным уравнениям соответствуют отличные друг от друга арифметические соотношения, и, что с повышением порядка дифференциального уравнения число неизвестных значений, входящих в эти соотношения, возрастает. В соответствии с этим и способ решения становится исключительно кропотливым. Нам кажется, что методу в некоторой мере можно сделать компактной, если связь между значениями u в точках сетки устанавливать при посредстве формулы Тайлора (см. ниже §§ 2 и 7).

Далее Richardson подробно останавливается на группе уравнений вида

$$\Delta u = 0, \quad \Delta u = -k^2 u, \quad \Delta\Delta u = 0, \quad \Delta\Delta u = k^4 u,$$

где Δ обозначает операцию Лапласа, и показывает, что ошибка, полученная от замены в левых частях этих уравнений производных через разности, а также ошибка значений u, доставляемых соответствующими арифметическими соотношениями, может быть представлена под видом

$$h^2 f_2(x, y, z) + h^4 f_4(x, y, z) + \ldots,$$

* Мы имеем в виду работу Runge в Z. f. Math. u. Phys., 56 (1908).

где $f_2, f_4 \ldots$ от h не зависят. При достаточно малых значениях h ошибка просто пропорциональна h^2.

Ниже мы покажем на примере

$$\Delta u = \varphi(x, y),$$

что удачным комбинированием значений

$$u_1,\ u_2,\ u, \ldots{}_8$$

представленных по формуле Тайлора, можно получить арифметические соотношения с погрешностью, пропорциональной h^6. Эти соотношения доставляют значения u с точностью порядка h^4.

Douglas, * излагая метод численного интегрирования уравнения минимальной поверхности

$$(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = 0, \tag{3}$$

где p, q, r, s и t обозначают частные производные от функции двух переменных по Монжу (Monge), показывает, как вычислять значение u в центре некоторого квадрата (далее называемого нами основным) посредством значений в вершинах и в серединах сторон.

Пользуясь методой Runge, Douglas заменяет дифференциальное уравнение минимальной поверхности уравнением в конечных разностях, и, решая это уравнение относительно u_0, после некоторых упрощений получает

$$u_0 = \frac{4(u_1+u_2+u_3+u_4)+(u_5+u_6+u_7+u_8)}{20} + \frac{3}{10}\cdot\frac{\begin{vmatrix}(u_1+u_3)-(u_2+u_4), & (u_1-u_3)(u_2-u_4)\\ (u_5+u_7)-(u_6+u_8), & (u_5-u_7)(u_6-u_8)\end{vmatrix}}{8h^2+\begin{vmatrix}u_5-u_7, & u_6-u_8\\ u_1-u_3, & u_2-u_4\end{vmatrix}}. \tag{4}$$

Вычисляя u_0 по этой формуле, Douglas основной квадрат разбивает на 16 равных квадратов (фиг. 4) и далее методом графической интерполяции подбирает значения u в точках пересечения сплошных линий с пунктирными. После этого формула (4) дает возможность вычислить u в центре любого из четырех квадратов, образованных сплошными линиями. Имеющиеся приближенные значения u можно улучшать при посредстве формулы (4).

Замечательно при этом то, что избегается решение системы уравнений со многими неизвестными, что сопряжено с громадной затратой труда и времени.

* A method of numerical solution of the problem of Plateau. Annals of Math., sec. ser., vol. 29, Princeton, 1928, pp. 180—188.

Так, например, в соответствии с делением сторон основного квадрата на n равных частей, число внутренних точек сетки будет

$$(n-1)^2,$$

а, следовательно, будем иметь $(n-1)^2$ уравнений со столькими же неизвестными. Легко усмотреть, что при сколько-нибудь малых значениях h, число уравнений так велико, что решение их практически невыполнимо.

Любопытно одно обстоятельство: в начале работы Douglas предполагает $h \to 0$, но, приводя численные примеры, он полагает $h = 4$ и $h = 10$ и получает хорошие результаты. Причина этого легко усматривается из примера § 6. Наконец, заметим, что задача Plateau чрезвычайно легко решается при посредстве полярных сеток, если минимальная поверхность есть поверхность вращения (см. § 7).

Хотя мы предположили u функцией от двух независимых переменных, однако, результаты наши легко могут быть обобщены и для случая трех независимых переменных. Конечно, в соответствии с этим вычислительная работа становится более кропотливой.

§ 2. **О соотношениях между значениями функции двух переменных.** Пусть u — функция от переменных x и y в любой точке (x_0, y_0) области A — представима по формуле Тайлора:

$$u_i = u_0 + \left(h_i \frac{\partial}{\partial x_0} + k_i \frac{\partial}{\partial y_0}\right)^{(1)} u(x_0 y_0) + \frac{1}{1\cdot 2}\left(h_i \frac{\partial}{\partial x_0} + k_i \frac{\partial}{\partial y_0}\right)^{(2)} u(x_0, y_0) + \tag{5}$$

$$\ldots + \frac{1}{1\cdot 2\ldots(n-1)}\left(h_i \frac{\partial}{\partial x_0} + k_i \frac{\partial}{\partial y_0}\right)^{(n-1)} u(x_0, y_0) + R_n,$$

где

$$R_n = \frac{1}{1\cdot 2\ldots n}\left(h_i \frac{\partial}{\partial x_0} + k_i \frac{\partial}{\partial y_0}\right)^{(n)} u(x_0 + \theta_i h_i,\ y_0 + \theta_i k_i),\ 0 < \theta_i < 1.$$

Умножим обе части (5) на множителя a_i и просуммируем полученные результаты по значениям i, от 1 до m, получится

$$u_0 \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{i=1}^{m} a_i u_i = H_0 + R_0^{(n)}, \tag{6}$$

где

$$H_0 = -\sum_{i=1}^{m} a_i \left(h_i \frac{\partial}{\partial x_0} + k_i \frac{\partial}{\partial y_0}\right)^{(1)} u(x_0, y_0) -$$

$$-\frac{1}{1\cdot 2}\sum_{i=1}^{m} a_i \left(h_i \frac{\partial}{\partial x_0} + k_i \frac{\partial}{\partial y_0}\right)^{(2)} u(x_0, y_0) - \ldots - \tag{7}$$

$$- \ldots - \frac{1}{1\cdot 2\ldots(n-1)}\sum_{i=1}^{m} a_i \left(h_i \frac{\partial}{\partial x_0} + k_i \frac{\partial}{\partial y_0}\right)^{(n-1)} u(x_0, y_0),$$

а

$$(8)\qquad R_0^{(n)} = -\frac{1}{1\cdot 2\ldots n}\sum_{i=1}^{m} a_i\left(h_i\frac{\partial}{\partial x_0} + k_i\frac{\partial}{\partial y_0}\right)^{(n)} u(x_0 + \theta_i h_i,\ y_0 + \theta_i k_i\ ).$$

Множители a_i либо постоянные величины, либо функции координат точки. Будем выбирать эти множители так, чтобы $R_0^{(n)}$ было бы возможно высокого порядка малости относительно $h_i k_i$. Если откинуть $R_0^{(n)}$, как величину n-го порядка малости относительно $h_i k_i$, получим следующую приближенную зависимость

$$(9)\qquad v_0\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{i=1}^{m} a_i v_i = H_0,$$

где через v_i обозначено приближенное значение u_i в i-ой точке сетки. Пусть число внутренних точек сетки — p. Будем иметь систему p уравнений вида (9) со столькими же неизвестными. Эта система позволяет по заданным значениям u на контуре найти приближенные значения v_i искомой функции во всех внутренних точках сетки. Зависимость (9) и представляет собою то арифметическое соотношение между значениями u в точках сетки с отметками

$$0,1,\ldots,m$$

о которой говорилось во введении. Ниже мы будем предполагать всюду $m > 2$.

Уравнение (6) упрощается, если точки сетки

$$1,2,\ldots,m$$

симметрично расположены относительно точки с отметкой 0 или же относительно прямой, проходящей через эту точку параллельно одной из координатных осей.

Так, например, пусть m число четное. Пусть точки сетки

$$1,2,\ldots,m$$

симметричны относительно 0:

$$h_\nu = -h_\mu,\quad k_\nu = -k_\mu.$$

Сверх того, пусть

$$a_\nu = a_\mu.$$

Положим для сокращения письма

$$\sum_{i=1}^{m} a_i\left(h_i\frac{\partial}{\partial x_0} + k_i\frac{\partial}{\partial y_0}\right)^{(r)} u(x_0, y_0) = P_r.$$

При r нечетном имеем

$$P_r = 0,$$

а при r четном

$$P_r = 2\sum_{s=0}^{r}\frac{r!}{s!(r-s)!}\frac{\partial^r u}{\partial x_0^{r-s}\,\partial y_0^{s}}\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}} a_i h_i^{r-s} k_i^{s},$$

где при суммировании i предписываем проходить значения индексов любой пары симметричных точек один лишь раз.

Пусть сетка образуется правильными многоугольниками, которые покрывают всю область A. Пусть h обозначает длину радиус-вектора, направленного от центра многоугольника к вершине. Будем иметь:

$$h_i = h\cos\alpha_i, \quad k_i = h\sin\alpha_i,$$

где α_i обозначает угол, образуемый i-тым радиус-вектором с осью x-ов. При этих предположениях

$$P_r = h^r\sum_{s=0}^{r}\frac{r!}{s!(r-s)!}\frac{\partial^r u}{\partial x_0^{r-s}\,\partial y_0^{s}}\sum_{i=1}^{m} a_i\cos^{r-s}\alpha_i\sin^{s}\alpha_i.$$

Пусть полный угол в 2π, который окружает точку с отметкой 0, делится радиус-векторами, выходящими из этой точки, на m равных частей, так что:

$$\alpha_i = i\,\frac{2\pi}{m}.$$

Пусть

$$a_i = 1 \qquad (i = 1,2,\ldots m),$$

и

$$r < m.$$

Разлагая $\cos^{r-s}\alpha_i$ и $\sin^{s}\alpha_i$ по cos-ам и sin-ам кратных дуг, после некоторых упрощений получим: *

1. При m четном

$$u_0 = \frac{u_1+u_2+\ldots+u_m}{m} - \frac{h^2}{4}\Delta u_0 - \frac{h^4}{64}\Delta^2 u_0 - \ldots - \frac{h^{m-2}}{\cdot\, 2^{m-2}\left[\left(\frac{m-2}{2}\right)!\right]^2}\Delta^{\frac{m-2}{2}} u_0 + \frac{R_0^{(m)}}{m}. \tag{10}$$

2. При m нечетном

$$u_0 = \frac{u_1+u_2+\ldots+u_m}{m} - \frac{h^2}{4}\Delta u_0 - \frac{h^4}{64}\Delta^2 u_0 - \ldots - \frac{h^{m-1}}{2^{m-1}\left[\left(\frac{m-1}{2}\right)!\right]^2}\Delta^{\frac{m-1}{2}} u_0 + \frac{R_0^{(m)}}{m}. \tag{11}$$

* Формулы эти принадлежат С. А. Гершгорину (Изв. Ленингр. политехн. инст., 1927).

В этих формулах $\Delta^s u_0$ сокращенно обозначает значение символического выражения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^{(s)} u(x, y)$$

в точке с координатами x_0, y_0. $R_0^{(m)}$ есть остаточный член m-го порядка малости относительно h.

Возвращаясь к случаю, когда точки расположены симметрично относительно 0, полагаем

$$m = 4.$$

В этом предположении многоугольниками, образующими сетку, могут быть: параллелограммы, прямоугольники и квадраты. Сетки, с помощью которых область A разлагается на прямоугольники, при численном интегрировании дают возможность для x и y брать различные ступени.

Пусть u есть интеграл уравнения Пуассона. Пусть сетка квадратная. Полагая

$$h_1 = -h_3 = h, \quad h_2 = h_4 = 0, \quad k_1 = k_3 = 0, \quad k_2 = -k_4 = h,$$

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1,$$

уравнение (6) приведем к виду

$$u_0 = \frac{u_1 + u_2 + u_3 + u_4}{4} - \frac{h_2}{4}\Delta u_0 + \frac{R_0^{(4)}}{4},$$

где $R_0^{(4)}$ величина четвертого порядка малости относительно h. Отбрасывая $\frac{R_0^{(4)}}{4}$, для достаточно малых значений h получим:

$$u_0 \simeq \frac{u_1 + u_2 + u_3 + u_4}{4} - \frac{h^2}{4}\Delta u_0. \tag{12}$$

В частности при

$$\Delta u = \text{const}$$

будем иметь (2).

Пусть для той же квадратной сетки

$$m = 8,$$

а внутренние точки сетки вблизи 0 расположены так, как это показано на фиг. 1.

Полагая

$$h_1 = h_5 = h_8 = -h_3 = -h_6 = -h_7 = h, \quad h_2 = h_4 = 0,$$

$$k_2 = k_5 = k_6 = -k_4 = -k_7 = -k_8 = h, \quad k_1 = k_3 = 0,$$

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 4, \quad a_5 = a_6 = a_7 = a_8 = 1$$

уравнение (6) приведем к виду:

$$u_0 = \frac{4[u_1 + u_2 + u_3 + u_4] + [u_5 + u_6 + u_7 + u_8]}{20} -$$

$$- \frac{6}{20} h^2 \Delta u_0 - \frac{h^4}{40} \Delta\Delta u_0 + \frac{R_0^{(6)}}{20},$$

где $R_0^{(6)}$ величина шестого порядка малости относительно h. Пренебрегая $\frac{R_0^{(6)}}{20}$, для достаточно малых значений h получим:

$$u_0 \approx \frac{4[u_1 + u_2 + u_3 + u_4] + [u_5 + u_6 + u_7 + u_8]}{20} -$$

$$- \frac{6}{20} h^2 \Delta u_0 - \frac{h^4}{40} \Delta\Delta u_0. \tag{13}$$

Если число внутренних точек сетки p, то и число уравнений вида (12) и (13) тоже p. Если значения u в граничных точках сетки известны, численное интегрирование уравнения Пуассона в обоих случаях приведется к фактическому решению p линейных уравнений с p неизвестными. По точности доставляемых результатов, как это будет видно ниже, система вида (13) имеет несомненное преимущество перед системой (12). Сказанное позволяет заключить, что для системы (13) можно взять сторону клеточки большей, чем для (12), это, в свою очередь, повлечет заметное уменьшение числа уравнений (13), что несомненно сильно облегчит вычислительную работу. Сверх того, если значения u, полученные решением системы (12), принять в качестве начальных для системы (13), мы улучшим эти значения. Это дело простой арифметики.

§ 3. **Смешанная задача теории потенциала.** Рассмотрим тот случай, когда имеем следующее граничное условие для функции u:

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \psi u = 0, \tag{14}$$

где ψ заданная на контуре функция.

Если число внутренних точек сетки p, а граничных q, то, составляя уравнения (6) для всех внутренних точек сетки, будем иметь p линейных уравнений с $p + q$ неизвестными. Следовательно, необходимо составить еще q линейных уравнений, связывающих значения u на контуре и внутри контура так, чтобы выполнялось условие (14). Обратимся к фиг. 3.

Рассмотрим какую-нибудь точку на контуре. Обозначим через u_k значение u в этой точке. Проведем через названную точку внутреннюю нормаль (n) к контуру. Диагоналям двух квадратов, с общей вершиной в этой точке придадим определенное направление (e_1) и (e_2).

Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial e_1} = \frac{\partial u}{\partial n}\cos(e_1, n),$$

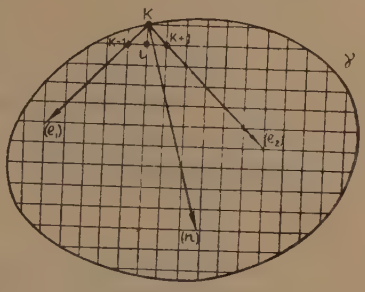
$$\frac{\partial u}{\partial e_2} = \frac{\partial u}{\partial n}\cos(e_2, n),$$

где $\frac{\partial u}{\partial e_1}$ и $\frac{\partial u}{\partial e_2}$ производные от u по направлениям (e_1) и (e_2). В силу того, что при достаточно малом h

$$\frac{\partial u}{\partial e_1} \approx \frac{u_{k-1} - \bar{u}_k}{h\sqrt{2}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial e_2} \approx \frac{u_{k+1} - \bar{u}_k}{h\sqrt{2}},$$

находим



Фиг. 3.

$$h\sqrt{2}\,\frac{\partial u}{\partial n} \approx \frac{u_{k-1} + u_{k+1} - 2\bar{u}_k}{\cos(e_1, n) + \cos(e_2, n)}, \tag{15}$$

где h сторона клеточки. Соотношение (15) видоизменяется в зависимости от типа контурной точки. В частности, например, если внутренняя нормаль есть биссектриса угла (e_1, e_2), получим

$$h\,\frac{\partial u}{\partial n} \approx \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2} - \bar{u}_k.$$

В этом случае справедливо также приближенное соотношение

$$h\,\frac{\partial u}{\partial n} \approx u_i - \bar{u}_k.$$

Число уравнений (15) равно числу граничных точек сетки. Внося в (14) значение $\frac{\partial u}{\partial n}$, определенное из (15), получим q линейных уравнений. Присовокупив к этим уравнениям p уравнений вида (6), будем иметь $p + q$ уравнений с $p + q$ неизвестными. Решая эти уравнения, находим численные значения u, как во внутренних точках сетки, так и на контуре.

§ 4. **О погрешности сеток решения и сходимости процесса.** Пусть

$$u = v + \xi, \tag{16}$$

где ξ — погрешность. Уравнения (6) и (9) дают

$$\xi_0 \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{i=1}^{m} a_i \xi_i = R_0^{(n)}. \tag{17}$$

Соотношение * (17) имеет место для всех внутренних точек сетки.

* ξ_i — погрешность в i-ой точке сетки.

Определению погрешности сеток решения и доказательству сходимости процесса, т. е. того, что при посредстве уравнений (9) можно прийти к последовательности чисел таких, что функция, представленная этими числами, удовлетворяет данному дифференциальному уравнению, мы предпошлем одну лемму.

Лемма. Пусть во всех внутренних точках γ имеет место соотношение

$$\theta_0 \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{i=1}^{m} a_i \theta_i \geqslant 0, \tag{18}$$

а на γ

$$\theta \geqslant 0,$$

где $\theta(x, y)$ — какая-либо функция, — непрерывная в области A.

Если значения a_i положительны в каждой точке области A, то во всех внутренних точках γ

$$\theta_i \geqslant 0.$$

В самом деле; пусть θ принимает в некоторых точках области A отрицательные значения, и пусть θ_0 наименьшее среди этих значений. Очевидно, в соседстве с одной из точек, где θ принимает значение θ_0, существует хотя бы одна точка, в которой

$$\theta > \theta_0.$$

В силу сказанного

$$\theta_0 \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{i=1}^{m} a_i \theta_i < 0,$$

что противоречит неравенству (18).

Аналогично можно установить, что если во всех внутренних точках γ

$$\theta_0 \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{i=1}^{m} a_i \theta_i \leqslant 0,$$

а на контуре

$$\theta \leqslant 0,$$

то всюду внутри γ

$$\theta_i \leqslant 0.$$

Следствие. Если во всех внутренних точках γ имеет место соотношение

$$\theta_0 \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{i=1}^{m} a_i \theta_i = 0,$$

а на контуре

$$\theta = 0,$$

то всюду в области A

$$\theta_i = 0.$$

Ниже мы предполагаем значения a_i положительными и известными всюду в области A.

Пусть точная нижняя граница совокупности значений ξ на γ есть $\underline{\xi}$, а точная верхняя граница — $\overline{\xi}$.

Пусть

$$\underline{\xi} + \tau\omega \text{ и } \overline{\xi} + \tau\omega$$

целые рациональные функции от x и y не выше $(n-1)$-го порядка, а τ — подлежащая определению постоянная.

Так как соотношению (6) удовлетворяет произвольная функция, допускающая всюду в области A представление по формуле Тайлора, то

$$(\underline{\xi} + \tau\omega_0)\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{i=1}^{m} a_i(\underline{\xi} + \tau\omega_i) = \tau H_0', \tag{19}$$

где

$$H_0' = -\sum_{i=1}^{m} a_i\left(h_i\frac{\partial}{\partial x_0} + k_i\frac{\partial}{\partial y_0}\right)^{(1)}\omega(x_0, y_0) - \frac{1}{1\cdot 2}\sum_{i=1}^{m} a_i\left(h_i\frac{\partial}{\partial x_0} + \right.$$

$$\left. + k_i\frac{\partial}{\partial y_0}\right)^{(2)}\omega(x_0, y_0) - \ldots - \frac{1}{1\cdot 2\ldots(n-1)}\sum_{i=1}^{m} a_i\left(h_i\frac{\partial}{\partial x_0} + \right.$$

$$\left. + k_i\frac{\partial}{\partial y_0}\right)^{(n-1)}\omega(x_0, y_0).$$

Из (17) и (19) немедленно следует:

$$(\xi_0 - \underline{\xi} - \tau\omega_0)\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{i=1}^{m} a_i(\xi_i - \underline{\xi} - \tau\omega_i) = R_0^{(n)} - \tau H'_0. \tag{20}$$

Потребуем, чтобы во всех внутренних точках γ было

$$R_0^{(n)} - \tau H_0' \geqslant 0. \tag{21}$$

Пусть уравнение контура γ есть

$$\omega = 0,$$

и

$$H_0' \neq 0$$

внутри этого контура.

Если обозначить

$$\xi_i - \underline{\xi} - \tau\omega_i = \theta_i,$$

то будем иметь, что на γ

$$\theta \geqslant 0$$

и, следовательно, в силу вышеприведенной леммы, всюду в области A

$$\xi_i \geqslant \underline{\xi} + \tau\omega_i.$$

Это неравенство всегда справедливо, если в зависимости от представившегося случая $H_0' > 0$ или $H_0' < 0$ внутри γ, положить соответственно

$$\tau = \left(\frac{R_0^{(n)}}{H_0'}\right)_{\min},$$

или

$$\tau = \left(\frac{R_0^{(n)}}{H_0'}\right)_{\max},$$

где $(\ )_{\min}$ обозначает наименьшее значение чисел

$$\frac{R_0^{(n)}}{H_0'},$$

а $(\ )_{\max}$ — наибольшее значение тех же чисел в области A.

Пусть теперь во всех внутренних точках контура γ имеет место неравенство

$$R_0^{(n)} - \tau H_0' \leqslant 0. \tag{22}$$

Тогда

$$\xi_i \leqslant \xi + \tau\omega_i.$$

Это неравенство всегда возможно, если в зависимости от случая $H_0' > 0$ или < 0 внутри γ положить

$$\tau = \left(\frac{R_0^{(n)}}{H_0'}\right)_{\max},$$

или

$$\tau = \left(\frac{R_0^{(n)}}{H_0'}\right)_{\min},$$

где $(\ )_{\max}$ обозначает наибольшее значение чисел

$$\frac{R_0^{(n)}}{H_0'},$$

а $(\ )_{\min}$ наименьшее значение тех же чисел в области A.

С помощью вышеизложенного погрешность сеток решения получает следующий окончательный вид:

$$|\xi| \leqslant \eta + |\omega_0|_{\max} \left|\frac{R_0^{(n)}}{H_0'}\right|_{\max}, \tag{23}$$

где $|\ |_{\max}$ обозначает наибольшее значение абсолютных величин чисел

$$\omega_0 \text{ и } \frac{R_0^{(n)}}{H_0'}$$

внутри γ, а η — точную верхнюю границу абсолютных значений чисел ξ на γ.

Пусть погрешность η вызывается тем обстоятельством, что не все точки сетки, называемые нами граничными, лежат на γ. Разница значений u в действительной граничной точке, лежащей на γ, и той, которой эту последнюю заменяем, не превосходит

$$2Mh,$$

где M — наибольшее абсолютное значение частных производных первого порядка u внутри γ. Следовательно, при

$$h \to 0 \quad \text{и} \quad \eta \to 0.$$

В том случае, когда γ не алгебраическая кривая, или она не разложима на конечное число частей алгебраических кривых, мы заключим ее внутри некоторой соответствующе выбранной замкнутой алгебраической кривой γ', не пересекающей самою себя (или внутри замкнутого контура, состоящего из конечногочисла частей алгебраических кривых) и возможно ближе примыкающей к данному контуру. Оценка (23) остается в силе.*

В частности, если за контур γ' принять круг или эллипс, получим оценки С. А. Гершгорина.**

Наконец, при выполнении условия (21) или (22) во всех внутренних точках γ легко доказать единственность решения системы (20).

В самом деле, рассмотрим тот частный случай, когда $\xi = 0$ на γ и

$$R_0^{(n)} - \tau H_0' = 0$$

во всех внутренних точках γ; тогда система (20) будет иметь единственное решение

$$\xi_i - \tau\omega_i = 0.$$

Стоит только допустить возможность другого решения

$$\xi_i - \tau\omega_i \neq 0,$$

* Предполагается возможность представления u во всех точках области ограниченной γ по формуле Тайлора. $|\ |_{max}$ будет обозначать соответственно наибольшее значение абсолютных величин чисел

$$\omega_0 \text{ и } \frac{R_0^{(n)}}{H_0'}$$

внутри γ' и γ, а η — точную верхнюю границу абсолютных значений ξ на γ. Уравнение контура γ' есть

$$\omega = 0$$

** Fehlerabschätzung für das Differenzenverfahren zur Lösung partieller Differentialgleichungen. Ztzchr. f. ang. Math. u. Mech., Bd. 10, 1930, S. 373 — 382; Об электрических сетках для приближенного решения дифференциального уравнения Лапласа. Журнал прикладной физики, т. IV. в. 3—4, 1929, стр. 3—29; Изв. Ленингр. политехн. инст., 1927.

как придем к существованию внутри γ некоторой точки, в которой

$$\xi_i - \tau\omega_i$$

принимает или наибольшее или наименьшее значение. В первом случае в этой точке имели бы

$$(\xi_0 - \tau\omega_0)\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{i=1}^{m} a_i(\xi_i - \tau\omega_i) > 0,$$

а во втором

$$(\xi_0 - \tau\omega_0)\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{i=1}^{m} a_i(\xi_i - \tau\omega_i) < 0,$$

что противоречит условию

$$R_0^{(n)} - \tau H_0' = 0,$$

справедливому для всех внутренних точек γ.

Итак, система уравнений вида

$$(\xi_0 - \tau\omega_0)\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{i=1}^{m} a_i(\xi_i - \tau\omega_i) = 0$$

имеет внутри γ единственное решение

$$\xi_i - \tau\omega_i = 0.$$

Следовательно, детерминант системы (20) отличен от нуля.

В случае

$$R_0^{(n)} - \tau H_0' \neq 0,$$

система (20) будет иметь опять-таки единственное решение, так как детерминант системы отличен от нуля.

Вместе с тем, если

$$\lim_{h\to 0} |\omega_0|_{\max} \left|\frac{R_0^{(n)}}{H_0'}\right|_{\max} = 0,$$

то и

$$\xi_i \to 0.$$

Этим мы считаем доказанной сходимость процесса, т. е. существование чисел v_i, которые, при $\xi_i \to 0$, стремятся к числам u_i, как к своим пределам, и на контуре принимают такие же значения, какие предписано принимать u.

Очевидно, что система уравнений (6) имеет одно определенное решение.

§ 5. Примеры на определение погрешности. Пусть интегрируется дифференциальное уравнение Пуассона. Пусть M_4 и M_6 обозначают в области A наибольшее значение абсолютной величины производных искомой функции u четвер-

того и шестого порядка. * Рассмотрим несколько случаев оценок, соответствующих уравнениям (12) и (13).

1^0. Контур γ — какая угодно алгебраическая кривая второго порядка;

$$\omega = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_3. \quad (24)$$ **

Для (12) находим оценку

$$|\xi| \leqslant \frac{M_4 h^2 |\omega|_{\max}}{12\,|a_{11} + a_{22}|},$$

а для (13)

$$|\xi| \leqslant \frac{M_6 h^4 |\omega|_{\max}}{60\,|a_{11} + a_{22}|}.$$

При

$$a_{11} + a_{22} = 0$$

эти оценки доставляют бесконечно большое значение для предела погрешности. Легко усмотреть, что в этом случае дискриминант кривой (24)

$$\Delta < 0,$$

а следовательно γ представляет собою либо гиперболу, либо пару пересекающихся прямых.

Во всех рассмотренных выше случаях для (12) погрешность получилась порядка h^2, а для (13) — порядка h^4. С уменьшением h уменьшается и погрешность. При $h \to 0$, $v_i \to u_i$, что подтверждает сходимость процесса нашего способа решения.

Следовательно, в зависимости от группировки точек, ближайших к 0, и выбора коэффициентов a_i, четырехугольные сетки могут доставлять точность порядка, как h^2 так и h^4.

2^0. Рассмотрим уравнение эллиптического типа

$$L(u) \equiv a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} - gu = t,$$

где

$$a, c, d, e, g \text{ и } t —$$

суть функции от (x, y).

Ниже предполагаем, что эти функции, а также граничные условия таковы, что допускают однозначное решение данного уравнения в области A.

Полагая для квадратной сетки

$$a_1 = a + \frac{hd}{2}, \quad a_2 = c + \frac{eh}{2}, \quad a_3 = a - \frac{dh}{2}, \quad a_4 = c - \frac{eh}{2},$$

* Мы предполагаем эти производные ограниченными в области A.

** Полагаем, что a_{11} и a_{22} не равны нулю одновременно.

согласно (6) будем иметь

$$u_0 \sum_{i=1}^{4} a_i - \sum_{i=1}^{4} a_i u_i = -h^2 (t_0 + g_0 u_0) + R_0.$$

Чтоб удовлетворить условиям леммы § 4, пусть *

$$a > 0, \quad c > 0, \quad g \geqslant 0, \quad \left|\frac{dh}{2}\right| < a \text{ и } \left|\frac{eh}{2}\right| < c.$$

За контур γ берем какую угодно алгебраическую кривую (24) второго порядка. Получим

$$|\xi| \leqslant \frac{h^2}{24} \left[\frac{(a+c) M_4 + 2(|d| + |e|) M_3}{\left| aa_{11} + ca_{22} + dQ + eR - \frac{g}{2}\omega \right|} \right]_{\max} \cdot |\omega|_{\max},$$

где M_3 и M_4 обозначают наибольшее значение абсолютной величины производных u третьего и четвертого порядка (ограниченных) в области A,

$$Q = a_{11} x + a_{12} y + a_1,$$
$$R = a_{12} x + a_{22} y + a_2.$$

Если γ есть эллипс, то координаты центра эллипса (x_c, y_c) будут удовлетворять системе уравнений:

$$Q = 0, \quad R = 0.$$

Следовательно, можно написать

$$Q = a_{11}(x - x_c) + a_{12}(y - y_c),$$
$$R = a_{12}(x - x_c) + a_{22}(y - y_c).$$

Пусть

$$a_{11} > 0, \quad a_{22} > 0.$$

Получим:

$$\left| aa_{11} + ca_{22} + dQ + eR - \frac{g}{2}\omega \right| \geqslant aa_{11} + ca_{22} - |dQ| - |eR| - \frac{g}{2}|\omega|,$$

предполагая правую часть неравенства положительной в области A.

Наконец, если уравнение выбранного нами эллипса есть

$$\frac{(x - x_c)^2}{p^2} + \frac{(y - y_c)^2}{q^2} = 1,$$

* Лемма остается в силе, если коэффициент при u_0 сделаем $> \sum_{i=1}^{m} a_i$.

т. е. если полуоси эллипса параллельны координатным осям, получится

$$|\xi| \leqslant \frac{h^2}{24}\left[\frac{(a+c)M_4 + 2(|d|+|e|)M_3}{\frac{a}{p^2}+\frac{c}{q^2}-\frac{|d|}{p}-\frac{|e|}{q}-\frac{g}{2}}\right]_{\max},$$

в предположении, что

$$\frac{a}{p^2}+\frac{c}{q^2}-\frac{|d|}{p}-\frac{|e|}{q}-\frac{g}{2} > 0$$

всюду в области A.

Сходимость процесса при $h \to 0$ очевидна.

§ 6. Численные примеры. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -1. \tag{25}$$

Как известно, определение кручения цилиндра с произвольным поперечным сечением, приводится к нахождению функции $u(x, y)$, которая внутри сечения удовлетворяет (25), а на границе условию $u = 0$.

Пусть сечение есть прямоугольник со сторонами один и два. На основании симметрии мы можем ограничиться рассмотрением четверти части сечения. Если каким-либо способом вычислим значения u в этой части сечения, тем самым определим значения u во всем сечении.

Пусть $h = 0.25$. Если вычисление вести с помощью системы уравнений вида (13), получим:

	$x=0$	0.25	0.50	0.75	1
$y=0.5$	0	0		0	0
0.25	0.08590	0.08335	0.07401	0.05166	0
0	0.11390	0.11080	0.09717	0.06625	0
— 0.25	0.08590	0.08335	0.07401	0.05166	0

Точное значение u, например, в центре прямоугольника есть 0.11387, следовательно в названной точке ошибка равна

0.00003.

Заметим, что метода Runge при тех же условиях доставляет для центра прямоугольника значение $u = 0.11211$, с соответствующей ошибкой

0.00176.

Берем $h = 0.5$. Уравнения (13) доставляют:

	$x=0$	0.5	1
$y=0.5$	0	0	0
0	0.11413	0.09783	0

В этом случае ошибка в центре прямоугольника равна

$$0.00026.$$

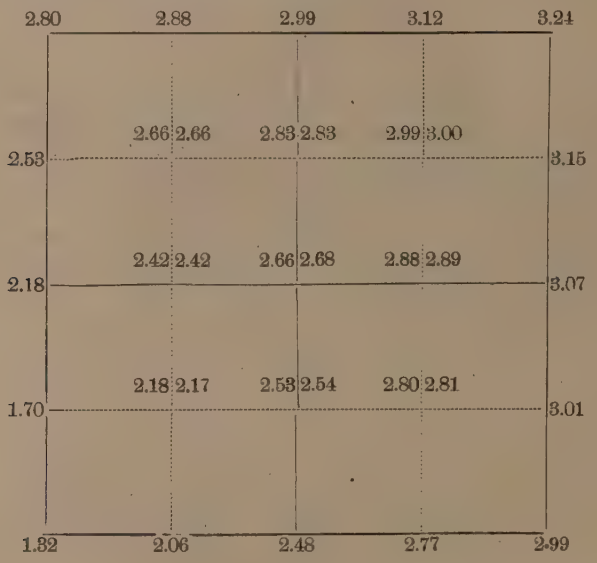
Рассмотрим частный интеграл дифференциального уравнения (3)

$$ch\, u = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

В качестве контура γ возьмем на плоскости $x0y$ квадрат, ограниченный прямыми

$$x = 2, \quad x = 10, \quad y = 0 \text{ и } y = 8.$$

Контурные значения u фиксированы на фиг. 4.



Фиг. 4.

Пусть сетка квадратная. Полагая

$$h_5 = -h_6 = -h_7 = h_8 = h, \quad k_5 = k_6 = -k_7 = -k_8 = h,$$

$$a_5 = a_6 = a_7 = a_8 = 1, \quad a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0,$$

уравнение (6) приведем к виду

$$u_0 = \frac{u_5 + u_6 + u_7 + u_8}{4} - \frac{h^2}{2}\Delta u_0 - \frac{R_0^{(4)}}{4}.$$

где $R_0^{(4)}$ величина четвертого порядка малости относительно h. Отбрасывая $\frac{R_0^{(4)}}{4}$ для достаточно малых значений h получим:

(26) $$u_0 \approx \frac{u_5 + u_6 + u_7 + u_8}{4} - \frac{h^2}{2}\Delta u_0.$$

В рассматриваемом случае величина

$$h^2 \Delta u_0 = -\frac{h^2}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}\,\sqrt{(x_0^2 + y_0^2 - 1)^3}}$$

оказывается настолько малой,* что на результат не окажет заметного влияния, если (12) и (26) заменить соотношениями:

$$u_0 \approx \frac{u_1 + u_2 + u_3 + u_4}{4}, \tag{27}$$

$$u_0 \approx \frac{u_5 + u_6 + u_7 + u_8}{4}, \tag{28}$$

и процесс вычисления сводится к весьма простому. В самом деле, (27) и (28) позволяют определить значение u в центре любого квадрата посредством ее значений в вершинах или в серединах сторон.

Полученные по формулам (27) и (28) численные значения u написаны вправо от внутренних точек сетки, влево от тех же точек фиксированы соответствующие точные значения u.

Замечательно при этом то, что мы избегаем решения системы уравнений со многими неизвестными. Так, например, при подразделении основного квадрата (фиг. 4) на 256 квадратиков, число уравнений, необходимых для определения значений u в внутренних точках сетки, было бы 225 со столькими же неизвестными.

§ **7. Случай полярных координат.** Методу будем развивать на примере решения уравнения Пуассона:

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} = \psi(r, \vartheta).$$

Рассмотрим внутри γ переменную точку с полярными координатами (r, ϑ). Пусть граничные значения u на контуре будут представлять собою некоторую известную функцию ϑ.

С помощью формулы Тайлора и простых преобразований получим (фиг. 2):

$$u_2 + u_4 = 2u_0 + (\Delta\vartheta)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta_0^2} + R_2^{(4)} + R_4^{(4)},$$

$$u_1 + u_3 = 2u_0 + (\Delta r)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r_0^2} + R_1^{(4)} + R_3^{(4)},$$

$$u_1 - u_3 = 2\Delta r \frac{\partial u}{\partial r_0} + R_1^{(3)} - R_3^{(3)},$$

* Вообще, H_0 зависит от частных производных u четного порядка, мало уклоняющихся от нуля.

где, например,

$$R_3^{(4)} = \frac{(\Delta\vartheta)^4}{1.2.3.4}\left[\frac{\partial^4 u}{\partial\vartheta^4}\right]_{\vartheta=\vartheta_0+\theta_1\Delta\vartheta} \qquad 0<\theta_1<1,$$

$$R_1^{(3)} = \frac{(\Delta r)^3}{1.2.3}\left[\frac{\partial^3 u}{\partial r^3}\right]_{r=r_0+\bar{\theta}_1\Delta r} \qquad 0<\bar{\theta}_1<1,$$

и т. д. Следовательно, при достаточно малых приращениях Δr и $\Delta\vartheta$ будем иметь:

$$2\left[1+\frac{1}{r_0^2}\left(\frac{\Delta r}{\Delta\vartheta}\right)^2\right]u_0 = \left[1+\frac{1}{2}\frac{\Delta r}{r_0}\right]u_1 + \left[1-\frac{1}{2}\frac{\Delta r}{r_0}\right]u_3 + \tag{29}$$

$$+\frac{1}{r_0^2}\left(\frac{\Delta r}{\Delta\vartheta}\right)^2[u_2+u_4] - \left(\frac{\Delta r}{r_0}\right)^2\Delta u_0,$$

где

$$\Delta u_0 = r_0^2\frac{\partial^2 u}{\partial r_0^2} + r_0\frac{\partial u}{\partial r_0} + \frac{\partial^2 u}{\partial\vartheta_0^2}.$$

Зависимость (29) справедлива для всех внутренних точек полярной сетки, если полюс 0 лежит вне γ. Данный нами путь приближенного интегрирования уравнения Пуассона неприложим в окрестностях полюса, когда этот последний находится внутри γ. Тогда все приведенные выше рассуждения в отношении точки 0 падают.

Число уравнений (29) будет ровно столько, сколько внутренних точек сетки. Решая эти уравнения, тем самым находим значения u во всех внутренних точках сетки.

Результаты чрезвычайно упрощаются, когда при r постоянном

$$u = \text{const.}$$

Полагая

$$u_0 = u_2 = u_4,$$

в последнем случае уравнение (29) преобразовываем в следующее:

$$2u_0 = \left[1+\frac{1}{2}\frac{\Delta r}{r_0}\right]u_1 + \left[1-\frac{1}{2}\frac{\Delta r}{r_0}\right]u_3 - \left(\frac{\Delta r}{r_0}\right)^2\Delta u_0. \tag{30}$$

При помощи рассуждений, аналогичных § 4, можно найти погрешность сеток решения и доказать сходимость процесса.

Перейдем теперь к численным вычислениям. Предложим себе проинтегрировать уравнение (3). Переписав его под видом

$$r+t = 2pqs - p^2t - q^2r, \tag{31}$$

приложим (30), пренебрегая величиной

$$\left(\frac{\Delta r}{r_0}\right)^2\Delta u_0.$$

Вычисление выполняется нами при посредстве двух значений u в точках, не лежащих на одной и той же окружности. Чтоб пояснить сказанное, пусть при

$$r_1 = 6, \quad u = 2.478,$$

а при

$$r_2 = 10, \quad u = 2.993.$$

Требуется составить таблицу значений u от

$$r_1 = 6 \text{ до } r_2 = 10.$$

Полагая $\Delta r = 1$, и выполняя вычисление, согласно (30), приходим к следующей таблице:

r	u	Значения u по формуле $ch\,u = r$	Ошибка
6	2.478	2.478	
7	2.633	2.634	0.001
8	2.768	2.769	0.001
9	2.887	2.887	0.000
10	2.993	2.993	

Физико-математический
институт им. В. А. Стеклова
Ленинград
23 XII 1933.

CH. MIKELADZE. SUR L'INTÉGRATION NUMÉRIQUE D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

RÉSUMÉ

Faisons passer dans le plan xy un contour fermé simple. Recouvrons le domaine A borné par ce contour d'un réseau de petit carrés de côté h.

Relions entre eux les noeuds du réseau de façon à marquer un contour γ' serrant d'aussi près que possible le contour γ. Enumérons les points à l'intérieur (noeuds du réseau) de γ' de 0 à N. Soit à rechercher une intégrale particulière $u(x, y)$ d'une certaine équation différentielle, prenant sur γ des valeurs données. Admettons de plus que la solution de la dite équation différentielle existe et soit en un point quelconque du domaine A représentable selon la formule de Taylor (5).* Multipliant les deux parties de (5) par des facteurs a_i dont le choix sera approprié à l'équation, et effectuant la sommation des résultats pour toutes les valeurs de i de 1 à m, nous obtiendrons (6). En négligeant $R_0^{(n)}$, comme étant du degré de petitesse n par rapport à h, nous arriverons à un système de N équations (9) à N inconnues. Par exemple, l'équation de Poisson

$$\Delta u = \varphi(x, y),$$

* Les numéros entre parenthèses se rapportent aux formules correspondantes du texte russe.

peut être intégrée selon le choix des a_i, à l'aide de la formule (12) ou de (13) (Pour la distribution des points du réseau correspondant aux index de u, voir à la fig. 1).

Aux formules (12) et (13) correspondant les estimations

$$|\xi| < \eta + \frac{M_4 h^2 |\omega|_{\max}}{12|a_{11} + a_{22}|}$$

et

$$|\xi| < \eta + \frac{M_6 h^4 |\omega|_{\max}}{60|a_{11} + a_{22}|}$$

où ξ est l'erreur de u en les points à l'intérieur du contour, η la limite supérieure exacte des valeurs absolues de l'erreur de u sur le contour γ', M_4 et M_6 sont les valeurs maxima des valeurs absolues des dérivées partielles du 4-me, respectivement du 6-me ordre de u dans le domaine A,

$$\omega = a_{11} x^2 + 2a_{12} xy + a_{22} y_2 + 2a_1 x + 2a_2 y + a_3.$$

Le contour γ est supposé compris à l'intérieur d'une courbe fermée

$$\omega = 0,$$

et $|\omega|_{\max}$ désignant la valeur maxima de $|\omega|$ à l'intérieur du domaine borné par cette courbe.

Institut Physico-mathématique V. Stekloff
de l'Académie des Sciences de l'URSS.

---

* Les numéros entre parenthèses se rap portent aux formules correspondantes du texte russe.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1934
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДЫ АКАДЕМИКА С. А. ЧАПЛЫГИНА К РЕШЕНИЮ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Д. Ю. ПАНОВА

(*Представлено академиком* Н. Н. Лузиным)

В 1919 году академиком С. А. Чаплыгиным была предложена весьма интересная и своеобразная метода приближенного решения дифференциальных уравнений.[1]

Метода С. А. Чаплыгина, как известно, дает возможность эффективного построения двух последовательностей функций y_ν и Y_ν, таких, что:

(a) $$y_\nu < y < Y_\nu,$$

(b) $$\lim_{\nu\to\infty} y_\nu = \lim_{\nu\to\infty} Y_\nu = y,$$

$$y_\nu^{(k)}(x_0) = Y_\nu^{(k)}(x_0) = y^{(k)}(x_0) = y_0^{(k)}, \qquad k = 0,1,2\ldots(n-1).$$

Через y здесь обозначено искомое решение дифференциального уравнения n-го порядка

$$F(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}) = 0,$$

удовлетворяющее условиям

$$y^{(k)}(x_0) = y_0^{(k)}. \qquad (k = 0,1,2,\ldots(n-1)).$$

Сходимость приближений y_ν и Y_ν, исследованная акад. Н. Н. Лузиным, становится, начиная с некоторого ν, исключительно быстрой,[2] что, в соединении с возможностью оценки погрешности на каждом этапе вычисления [см. (a)], делает методу весьма ценной с практической точки зрения.[3] Кроме того следует

[1] Акад. С. А. Чаплыгин. Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. Тр. ЦАГИ, № 130 (1932 г.).

[2] Акад. Н. Н. Лузин. О методе приближенного интегрирования акад. С. А. Чаплыгина. Тр. ЦАГИ, № 141 (1932 г.).

[3] Это обстоятельство резко отличает методу С. А. Чаплыгина от сходной по идее методы Перрона (*Math. Ann.*, Bd. 76, pp. 471—484).

отметить, что нижние и верхние функции y_ν и Y_ν получаются как решения некоторых линейных уравнений: это обстоятельство является очень существенным, позволяя при помощи этой методы *сводить решение нелинейной проблемы к решению ряда линейных проблем.*

Ясно, что основная идея методы С. А. Чаплыгина весьма широка и возможности ее применения в той или иной модификации не исчерпываются областью *дифференциальных уравнений*. В настоящей работе мы делаем попытку построения в духе идей С. А. Чаплыгина новой методы приближенного решения *интегральных уравнений* (в частности нелинейных).

Первая часть работы посвящена установлению ряда интегральных неравенств, аналогичных дифференциальным неравенствам С. А. Чаплыгина, и некоторых вспомогательных формул, вторая — построению последовательностей верхних и нижних функций, аппроксимирующих решение нелинейного интегрального уравнения, и изучению сходимости этих последовательностей; в третьей части мы рассматриваем аппроксимацию решений линейных и нелинейных интегральных уравнений при помощи последовательностей верхних и нижних функций более простого типа, построение которых требует лишь решения систем алгебраических линейных уравнений, и исследуем погрешности, возникающие при этом.

I

1. Рассмотрим линейное интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,s)\,\varphi(s)\,ds.$$

Будем считать ядро $K(x,y)$ этого уравнения удовлетворяющим следующим условиям на квадрате $a \leqslant \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \leqslant b$, в котором будут проходить все наши рассмотрения:

(1)
1. $K(x,y)$ — непрерывна [1]
2. $K(x,y) \geqslant 0$.

Введем далее обозначения:

$$L[\varphi(x)] = \varphi(x) - f(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)\,\varphi(s)\,ds \tag{2}$$

[1] Требования, которые мы накладываем в дальнейшем на рассматриваемые функции, зачастую слишком сильны и ценою некоторого усложнения рассуждений могли бы быть и понижены; в частности, непрерывность ядра не требуется нам на протяжении I и II части работы, ограниченность ядра может быть заменена условием Гурса (ограниченность итераций), и т. п.; мы не будем, однако, стремиться к наибольшей возможной общности, чтобы не затемнять изложения.

и

$$\overline{L}[\varphi(x)] = \varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi(s)\,ds. \tag{3}$$

Тогда имеет место следующая теорема:

Теорема 1. *Если* $\overline{L}[\Phi_1(x)] > 0 > \overline{L}[\varphi_1(x)]$, *то для малых* $\lambda > 0$ *имеем* $\Phi_1(x) > 0 > \varphi_1(x)$ *на сегменте* $[a,b]$. Мы проведем доказательство только для одного из неравенств. Пусть

$$\Phi_1(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)\Phi_1(s)\,ds > 0.$$

Заменяя x на s, а s на y, умножая на $\lambda K(x,s)$ и интегрируя, получаем

$$\lambda \int_a^b K(x,s)\Phi_1(s)\,ds - \lambda^2 \int_a^b \int_a^b K(x,s)K(s,y)\Phi_1(y)\,ds\,dy > 0.$$

Складывая с предыдущим и вводя итерированное ядро, имеем:

$$\Phi_1(x) - \lambda^2 \int_a^b K_2(x,s)\Phi_1(s)\,ds > 0.$$

Продолжая этот процесс находим:

$$\Phi_1(x) - \lambda^n \int_a^b K_n(x,s)\Phi_1(s)\,ds > 0. \tag{4}$$

Пусть

$$K(x,y) < M.$$

Тогда, как известно,

$$K_n(x,y) < M^n (b-a)^{n-1}.$$ [1]

Если

$$\lambda < \frac{1}{M(b-a)}, \tag{5}$$

то, как легко видеть, второй член левой части (4) при $n \to \infty$ будет стремиться к нулю и мы получим, что

$$\Phi_1(x) > 0.$$

и т. д.

Очевидным следствием теоремы 1 является:

[1] Вместо этой оценки можно использовать также другие, напр. оценку Э. Шмидта. Тогда все дальнейшие рассуждения могут быть проведены для соответствующих значений λ.

Теорема 2. *Если* $L[\Phi_1(x)] > L[\varphi_1(x)]$, *то для положительных* λ, *удовлетворяющих условию* (5), *имеем* $\Phi_1(x) > \varphi_1(x)$.

В самом деле, полагая

$$\Phi_1(x) - \varphi_1(x) = \psi(x),$$

можем переписать условия теоремы так:

$$\overline{L}[\psi(x)] > 0,$$

откуда по теореме 1

$$\psi(x) > 0$$

для малых $\lambda > 0$ и

$$\Phi_1(x) > \varphi_1(x)$$ ч. т. д.

Следствие 1. Если $\varphi(x)$ — решение уравнения $L[\varphi(x)] = 0$, а

$$L[\Phi_1(x)] > 0 > L[\varphi_1(x)],$$

то

$$\Phi_1(x) > \varphi(x) > \varphi_1(x)$$

в предположениях теоремы 2.

Интегральные неравенства, являющиеся содержанием теорем 1 и 2, доказаны нами, таким образом, для *малых значений* λ (для тех значений, при которых годится метода последовательных приближений). Можно показать, что аналогичные неравенства будут иметь место и при других, не характеристических положительных значениях λ, *но*, вообще говоря, *не на всем сегменте* (a, b).

Пусть $\Gamma(x, y; \lambda)$ является резольвентой рассматриваемого уравнения. Фиксировав некоторое, не характеристическое значение $\lambda > 0$, построим на плоскости (x, y) кривую

$$\Gamma(x, y; \lambda) = 0 \tag{6}$$

и разметим области A и B, в которых $\Gamma(x, y; \lambda)$ соответственно положительна и отрицательна. Рассмотрим далее полосу $[a \leqslant y \leqslant b]$; эта полоса высекает из областей A и B области A^* и B^*. Заменим область A^* системой прямоугольников E, которая получится, если провести через точки пересечения кривой (6) с прямыми $y = a$ и $y = b$ вертикальные прямые и выбрать прямоугольники, целиком принадлежащие к A^*. Проектируя эту систему прямоугольников на ось x, получим множество интервалов, которое мы обозначим Δ. Мы покажем, что неравенства, установленные в теоремах 1 и 2, будут иметь место на множестве Δ.

Пусть

$$\Phi_1(y) > f(y) + \lambda \int_a^b K(y, s)\, \Phi_1(s)\, ds.$$

Умножим обе части этого неравенства на $\lambda\Gamma(x, y; \lambda)$, которая на множестве E по условию положительна, и проинтегрируем по y от a до b.

$$\lambda \int_a^b \Gamma(x, y; \lambda)\, \Phi_1(y)\, dy > \lambda \int_a^b \Gamma(x, y; \lambda)\, f(y)\, dy +$$

$$+ \lambda^2 \int_a^b \int_a^b \Gamma(x, y; \lambda)\, K(y, s)\, \Phi_1(s)\, dy\, ds.$$

Но

$$\lambda \int_a^b \Gamma(x, y; \lambda)\, K(y, s)\, dy = \Gamma(x, s; \lambda) - K(x, s);$$

поэтому

$$\lambda \int_a^b \Gamma(x, y; \lambda)\, \Phi_1(y)\, dy > \lambda \int_a^b \Gamma(x, y; \lambda)\, f(y)\, dy +$$

$$+ \lambda \int_a^b \Gamma(x, s; \lambda)\, \Phi_1(s)\, ds - \lambda \int_a^b K(x, s)\, \Phi_1(s)\, ds$$

или

$$\lambda \int_a^b K(x, s)\, \Phi_1(s)\, ds > \lambda \int_a^b \Gamma(x, y; \lambda)\, f(y)\, dy.$$

Но из данного нам неравенства следует, что

$$\Phi_1(x) - f(x) > \lambda \int_a^b K(x, s)\, \Phi_1(s)\, ds;$$

подставляя вместо

$$\int_a^b K(x, s)\, \Phi_1(s)\, ds$$

бо́льшую величину, a fortiori получаем:

$$\Phi_1(x) - f(x) > \lambda \int_a^b \Gamma(x, y, \lambda)\, f(y)\, dy$$

или

$$\Phi_1(x) > f(y) + \lambda \int_a^b \Gamma(x, y; \lambda)\, f(y)\, dy.$$

Но если $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, ds$$

то, как известно,

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \Gamma(x, y; \lambda) f(y)\, dy$$

и потому окончательно получаем

$$\Phi_1(x) > \varphi(x)$$

на Δ.

Простые примеры показывают, что возможны случаи, когда множество Δ будет не пустым.

Так, при малых $\lambda > 0$ и $K(x, y) > 0$ весь сегмент $[a, b]$ будет принадлежать к множеству Δ, так как

$$\Gamma(x, y; \lambda) = K(x, y) + \lambda K_2(x, y) + \lambda^2 K_3(x, y) + \ldots;$$

это находится в полном согласии с условиями теорем 1 и 2. С другой стороны, нетрудно привести примеры таких ядер $K(x, y)$, для которых, при достаточно большом значении $\lambda > 0$, множество Δ будет пустым. Рассматривая, например, уравнение

$$\varphi(x) = x + \lambda \int_0^1 (x + s) \varphi(s)\, ds,$$

имеем

$$\Gamma(x, y; \lambda) = \frac{\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)(x + y) + \lambda xy + \frac{\lambda}{3}}{1 - \lambda - \frac{\lambda^2}{12}}$$

с характеристическими числами

$$\lambda_1 = -12.928,$$

$$\lambda_2 = 0.928.$$

Возьмем

$$\lambda = 6.$$

Тогда

$$\Gamma(x, y; 6) = -\frac{1}{4}(3xy - x - y + 1).$$

Кривая $\Gamma(x, y; 6) = 0$ представляет собой равнобочную гиперболу с асимптотами $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{3}$, проходящую через точки $(1;0)$ и $(0;1)$ (см. фиг. 1); область B, где $\Gamma(x, y; 6) < 0$ содержит начало координат. Очевидно, что в полосе $(0,1)$ нельзя построить ни одного прямоугольника, в котором $\Gamma(x, y; 6)$ была бы положительна.

Нетрудно показать, что в этом случае не имеет места теорема 2. В самом деле, уравнение

$$L[\varphi(x)] = \varphi(x) - x - 6\int_0^1 (x+s)\varphi(s)\,ds = 0$$

имеет решение

$$\varphi(x) = \frac{1}{4}(x-1).$$

Возьмем

$$\Phi(x) = -\frac{1}{6}.$$

Тогда

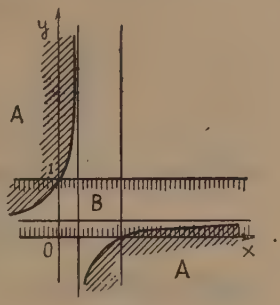
$$L[\Phi(x)] = \frac{1}{3} > 0 \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1),$$

а между тем

$$\Phi(x) < \varphi(x)$$

для

$$\frac{1}{3} < x \leqslant 1.$$



Фиг. 1.

Мы не будем здесь заниматься более подробным исследованием этого вопроса, так как в дальнейшем изложении во многих пунктах нам придется предполагать λ малым, и, следовательно, мы будем иметь возможность опираться на теоремы 1 и 2.

Заметим, что условия

$$\lambda > 0, \quad K(x,y) > 0,$$

$$\lambda > 0, \quad \Gamma(x,y;\lambda) > 0,$$

могут быть заменены такими:

$$\lambda K(x,y) > 0, \quad \lambda\Gamma(x,x;\lambda) > 0.$$

Однако, перейти к случаю

$$K(x,y) < 0,$$

без условия $\lambda < 0$, не удается. Простой пример подтверждает это. Рассмотрим уравнение

$$L^*[\varphi(x)] = \varphi(x) - x + \lambda\int_0^1 \varphi(s)\,ds = 0,$$

в котором мы имеем

$$K(x,y) = -1.$$

Это уравнение имеет решение

$$\varphi(x) = x - \frac{\lambda}{2(1+\lambda)}.$$

Положим $\lambda = \frac{1}{2}$. Тогда

$$L^*[\varphi(x)] = \varphi(x) - x + \frac{1}{2}\int_0^1 \varphi(s)\,ds$$

$$\varphi(x) = x - \frac{1}{6}.$$

Беря $\Phi(x) = \frac{3}{4}$, имеем:

$$L^*[\Phi(x)] = \frac{9}{8} - x > 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant 1);$$

с другой стороны

$$\Phi(x) < \varphi(x)$$

на интервале

$$\left(\frac{11}{12} < x \leqslant 1\right).$$

2. Рассмотрим теперь *нелинейное интегральное уравнение* вида:

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 K(x,s)\,F\left(s, \varphi(s)\right)\,ds. \tag{7}$$

Относительно λ и $K(x,y)$ оставим прежние предположения. Функцию $F(x, y)$ будем считать *непрерывной и дважды дифференцируемой* по y. Кроме того будем предполагать, что

$$\frac{\partial F}{\partial y} > 0 \tag{8}$$

в некоторой области G: $[a \leqslant x \leqslant b]$, $[g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x)]$ плоскости (xy).

Введем затем обозначение

$$N[\varphi(x)] = \varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)\,F\left(s, \varphi(s)\right)\,ds.$$

Тогда имеет место

Теорема 3. *Если* $[N\Phi_1(x)] > N[\varphi_1(x)]$ *и обе дуги* $y = \Phi_1(x)$ *и* $y = \varphi_1(x)$, $[a \leqslant x \leqslant b]$, *принадлежат области* G, *то при малом* $\lambda > 0$ *будем иметь* $\Phi_1(x) > \varphi_1(x)$ *на* $[a, b]$.

Для доказательства введем функцию

$$p(x) = \frac{F(x, \Phi_1(x)) - F(x, \varphi_1(x))}{\Phi_1(x) - \varphi(x)} = F_y'(x, \eta(x)),$$

по сделанным предположениям конечную и непрерывную в области G; по условию $p(x) > 0$ на $[a, b]$. Составляя разность

$$N[\Phi_1(x)] - N[\varphi_1(x)] > 0$$

и вводя обозначение

$$\Phi_1(x) - \varphi_1(x) = \psi(x),$$

получаем для $\psi(x)$ неравенство

$$\psi(x) - \lambda \int_a^b K^*(x, s)\psi(s)\, ds > 0,$$

где

$$K^*(x, y) = K(x, y)p(y) > 0$$

в квадрате $\left[a \leqslant \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \leqslant b\right]$. Отсюда, обозначая через P максимум F_y' в области G, получаем для

$$0 < \lambda < \frac{1}{MP(b-a)},$$

по теореме 1 неравенство

$$\psi(x) > 0,$$

или

$$\Phi_1(x) > \varphi_1(x).$$

Следствие 2. Если $\varphi(x)$ — решение уравнения $N[\varphi(x)] = 0$, а

$$N[\Phi_1(x)] > 0 > N[\varphi_1(x)],$$

то, в предположениях теоремы 3, $\Phi_1(x) > \varphi(x) > \varphi_1(x)$.

Нам нужна будет в дальнейшем еще одна форма уравнения (7). Полагая

$$F(x, \varphi(x)) = \rho(x),$$

$$\varphi(x) = \Phi(x, \rho(x)),$$

можем переписать уравнение (7) в виде

$$M[\rho(x)] = \Phi(x, \rho(x)) - \lambda \int_a^b K(x, s)\rho(s)\, ds = 0. \tag{9}$$

Для этого уравнения будет справедлива теорема, аналогичная теореме 3; функция $\Phi(x, y)$ будет, очевидно, при выполнении условия (8), непрерывной и дифференцируемой по y, причем

$$\Phi_y'(x, y) = \frac{1}{F_y'(x, y)} > 0. \tag{10}$$

Теорема 4. *Если* $M[P_1(x)] > M[\rho_1(x)]$ *и обе дуги* $y = P_1(x)$ *и* $y = \rho_1(x)$; $[a \leqslant x \leqslant b]$, *принадлежат области* G, *то при малом* $\lambda > 0$ *будем иметь* $P_1(x) > \rho_1(x)$ *на* $[a, b]$.

Для доказательства, заметим, что

$$M[P_1(x)] \equiv N[\Phi_1(x)],$$
$$M[\rho_1(x)] \equiv N[\varphi_1(x)];$$

поэтому из условия, на основании теоремы 3, следует:

$$\Phi_1(x) - \varphi_1(x) > 0.$$

Но

$$P_1(x) = F(x, \Phi_1(x)),$$
$$\rho_1(x) = F(x, \varphi_1(x)).$$

Поэтому

$$P_1(x) - \rho_1(x) = F[x, \Phi_1(x)] - F[x, \varphi_1(x)] = [\Phi_1(x) - \varphi_1(x)] F_y'[\tilde{\varphi}_1(x)] > 0,$$

при сделанных предположениях.

Следствие 3. Если $\varphi(x)$ — решение уравнения $M[\varphi(x)] = 0$, а $M[\Phi_1(x)] > 0 > M[\varphi_1(x)]$, то, в предположениях теоремы 3, имеем $\Phi_1(x) > \varphi(x) > \varphi_1(x)$.

3. Для дальнейшего нам потребуются две вспомогательные формулы, к выводу которых мы и приступим.

Вычислим

$$M[\varphi(x) + \delta(x)] = \Phi[x, \varphi(x) + \delta(x)] - \lambda \int_a^b K(x, s)[\varphi(s) + \delta(s)]\, ds.$$

Разлагая Φ, имеем

$$\Phi[x, \varphi(x) + \delta(x)] = \Phi[x, \varphi(x)] + \Phi_\varphi'[x, \varphi(x)]\delta(x) + \frac{1}{2}\Phi_{\varphi\varphi}''[x, \tilde{\varphi}(x)]\delta^2(x),$$
$$(\varphi(x) < \tilde{\varphi}(x) < \varphi(x) + \delta(x)),$$

откуда

$$M[\varphi(x) + \delta(x)] = M[\varphi(x)] + \Phi_\varphi'[x, \varphi(x)]\delta(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\delta(s)\, ds +$$
$$+ \frac{1}{2}\Phi_{\varphi\varphi}''[x, \tilde{\varphi}(x)]\delta^2(x).$$

Введем обозначение:

$$L_\varphi[\,{}_x^{\cdot}\,] = \frac{M[\varphi(x)]}{\Phi_\varphi'[x, \varphi(x)]} + [\,{}_x^{\cdot}\,] - \lambda \int_a^b \frac{K(x, s)}{\Phi_\varphi'[x, \varphi(x)]}[\,{}_s^{\cdot}\,]\, ds. \quad (11)$$

[1]) Значок $[\,{}_x^{\cdot}\,]$ указывает место и аргумент функции, входящей в состав оператора.

Тогда мы будем иметь, очевидно:

(I) $$M[\varphi(x)+\delta(x)] = \Phi_{\varphi}'[x,\varphi(x)]\,L_{\varphi}[\delta(x)] + \frac{1}{2}\Phi_{\varphi\varphi}''[x,\tilde{\varphi}(x)]\,\delta^2(x).$$

Это — *первая из нужных нам формул.*

Чтобы получить вторую вычислим

$$M[\varphi(x)-\delta(x)] = \Phi[x,\varphi(x)-\delta(x)] - \lambda\int_a^b K(x,s)\,[\varphi(s)-\delta(s)]\,ds,$$

разлагая Φ не по формуле Тэйлора, а по интерполяционной формуле Ньютона:

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f(z_1)-f(z_0)}{z_1-z_0}(z-z_0) + \frac{f''(\zeta)}{2}(z-z_0)(z-z_1), \qquad \left[z_0 < \begin{matrix}z\\ \zeta\end{matrix} < z_1\right].$$

Мы применим эту формулу для случая $z_1 < z < z_0$, считая

$$f(z) = \Phi[x,z]; \quad z_0 = \varphi(x), \quad z = \varphi(x)-\delta(x), \quad z_1 = \psi(x).$$

Тогда

$$\Phi[x,\varphi(x)-\delta(x)] = \Phi[x,\varphi(x)] + \frac{\Phi[x,\varphi(x)]-\Phi[x,\psi(x)]}{\varphi(x)-\psi(x)}[-\delta(x)] +$$
$$+\frac{1}{2}\Phi_{\varphi\varphi}''[x,\tilde{\tilde{\varphi}}(x)][-\delta(x)][\varphi(x)-\delta(x)-\psi(x)],$$
$$\left(\psi(x) < \begin{matrix}\tilde{\tilde{\varphi}}(x)\\ \varphi(x)-\delta(x)\end{matrix} < \varphi(x)\right).$$

Введем обозначения:

(12) $$P[x,\varphi(x),\psi(x)] = \frac{\Phi[x,\varphi(x)]-\Phi[x,\psi(x)]}{\varphi(x)-\psi(x)} = \Phi_{\varphi}'[x,\tilde{\varphi}(x)]$$

и

(13) $$\Lambda_{\varphi\psi}\left[\begin{matrix}\cdot\\ x\end{matrix}\right] = -\frac{M[\varphi(x)]}{P[x,\varphi(x),\psi(x)]} + \left[\begin{matrix}\cdot\\ x\end{matrix}\right] - \lambda\int_a^b \frac{K(x,s)}{P[x,\varphi(x),\psi(x)]}\left[\begin{matrix}\cdot\\ s\end{matrix}\right]ds.$$

Так как

$$M[\varphi(x)-\delta(x)] = M[\varphi(x)] - P[x,\varphi(x),\psi(x)]\,\delta(x) + \lambda\int_a^b K(x,s)\,\delta(s)\,ds -$$
$$-\frac{1}{2}\Phi_{\varphi\varphi}''[x,\tilde{\tilde{\varphi}}(x)]\,\delta(x)\,[\varphi(x)-\delta(x)-\psi(x)],$$

получаем

(II) $$M[\varphi(x)-\delta(x)] = -P[x,\varphi(x),\psi(x)]\,\Lambda_{\varphi\psi}[\delta(x)] -$$
$$-\frac{1}{2}\Phi_{\varphi\varphi}''[x,\tilde{\tilde{\varphi}}(x)]\,\delta(x)\,[\varphi(x)-\delta(x)-\psi(x)].$$

Это — *вторая формула.*

II

4. Мы займемся теперь построением последовательностей верхних и нижних функций $\Phi_n(x)$ и $\varphi_n(x)$, аппроксимирующих решение уравнения

$$M[\varphi(x)]=0. \tag{14}$$

Пусть мы нашли функции $\varphi_0(x)$ и $\Phi_0(x)$, такие, что

$$\begin{aligned} M[\varphi_0(x)]&=\mu_0(x)<0,\\ M[\Phi_0(x)]&=\nu_0(x)>0. \end{aligned} \tag{15}$$

на интервале (a, b). Определим функции $\xi_0(x)$ и $\eta_0(x)$ из уравнений

$$\left.\begin{aligned} L_{\varphi_0}[\xi_0(x)]&=0,\\ \Lambda_{\Phi_0\varphi_0}[\eta_0(x)]&=0, \end{aligned}\right\} \quad \text{(см. (11) и (13))} \tag{16}$$

и положим

$$\begin{aligned} \varphi_1(x)&=\varphi_0(x)+\xi_0(x),\\ \Phi_1(x)&=\Phi_0(x)-\eta_0(x). \end{aligned} \tag{17}$$

Нетрудно видеть, что

$$\Phi_0(x)>\Phi_1(x);\quad \varphi_1(x)>\varphi_0(x). \tag{18}$$

Для этого достаточно показать, что

$$\xi_0(x)>0,\quad \eta_0(x)>0.$$

Но

$$L_{\varphi_0}[0]=\frac{\mu_0(x)}{\Phi_\varphi'[x,\varphi_0(x)]}<0$$

[согласно (15) и (10)], а для $\Lambda_{\Phi_0\varphi_0}[0]$ имеем

$$\Lambda_{\Phi_0\varphi_0}[0]=-\frac{\nu_0(x)}{P[x,\Phi_0(x),\varphi_0(x)]}<0,$$

т. е.

$$L_{\varphi_0}[0]<L_{\varphi_0}[\xi_0(x)]=0,$$

$$\Lambda_{\Phi_0\varphi_0}[0]<\Lambda_{\Phi_0\varphi_0}[\eta_0(x)]=0.$$

Но тогда по теореме 2 [1]

$$\begin{aligned} 0&<\xi_0(x),\\ 0&<\eta_0(x). \end{aligned} \tag{19}$$

[1] Везде в дальнейшем мы будем предполагать λ достаточно малым, так-что пользование теоремами о интегральных неравенствах является законным.

Можно показать далее, что

$$\Phi_1(x) > \varphi_0(x), \tag{20}$$

или, что то же самое, что

$$\eta_0(x) < \Phi_0(x) - \varphi_0(x). \tag{21}$$

Для этого вычислим

$$\begin{aligned}\Lambda_{\Phi_0\varphi_0}[\Phi_0(x) - \varphi_0(x)] &= \frac{1}{P[x, \Phi_0(x), \varphi_0(x)]}\Big[-M[\Phi_0(x)] + \\ &+ P[x, \Phi_0(x), \varphi_0(x)][\Phi_0(x) - \varphi_0(x)] - \lambda\int_a^b K(x,s)[\Phi_0(s) - \varphi_0(s)]\,ds\Big] = \\ &= \frac{1}{P[x, \Phi_0(x), \varphi_0(x)]}\Big[-M[\Phi_0(x)] + M[\Phi_0(x)] - M[\varphi_0(x)]\Big] = \\ &= -\frac{\mu_0(x)}{P[x, \Phi_0(x), \varphi_0(x)]} > 0,\end{aligned} \tag{22}$$

согласно (15) и (10); таким образом

$$\Lambda_{\Phi_0\varphi_0}[\Phi_0(x) - \varphi_0(x)] > \Lambda_{\Phi_0\varphi_0}[\eta_0(x)] = 0,$$

а по теореме 2, отсюда следует неравенство (20).

Предположим теперь, что вторая производная по y функции $\Phi(x, y)$ не меняет знака в области G, для определенности — *отрицательна*:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} < 0.^{1)} \tag{23}$$

Тогда легко показать, что

$$M[\varphi_1(x)] < 0,$$
$$M[\Phi_1(x)] > 0.$$

В самом деле, имея в виду (17) и (16), получаем по формуле (I)

$$M[\varphi_1(x)] = \frac{1}{2}\Phi''_{\varphi\varphi}[x, \bar{\varphi}(x)]\,\xi_0^2(x) < 0,$$

согласно (23). Аналогично

$$M[\Phi_1(x)] = -\frac{1}{2}\Phi''_{\varphi\varphi}[x, \bar{\bar{\varphi}}(x)]\,\eta_0(x)[\Phi_1(x) - \varphi_0(x)] > 0,$$

согласно (23), (19) и (20).

1) Если $\partial^2\Phi/\partial y^2 > 0$, то все рассуждения могут быть сохранены с тем отличием, что тогда мы выберем Φ_0 и φ_0 так, чтобы было $M[\Phi_0] < 0$, $M[\varphi_0] > 0$, и последовательность $\{\Phi_n\}$ будет служить последовательностью *нижних* функций, а $\{\varphi_n\}$ — *верхних*.

Пусть

$$M[\varphi_1(x)] = \mu_1(x) < 0,$$
$$M[\Phi_1(x)] = \nu_1(x) > 0.$$

Определим функции $\xi_1(x)$ и $\eta_1(x)$ из уравнений

$$L_{\varphi_1}[\xi_1(x)] = 0,$$
$$\Lambda_{\Phi_1\varphi_1}[\eta_1(x)] = 0,$$

и положим

$$\varphi_2(x) = \varphi_1(x) + \xi_1(x),$$
$$\Phi_2(x) = \Phi_1(x) - \eta_1(x).$$

Так же, как и раньше, можно будет показать, что

$$0 < \xi_1(x),$$
$$0 < \eta_1(x),$$
$$\Phi_2(x) > \varphi_1(x);$$

(из доказательства этого положения будет, между прочим, следовать, что

$$\Phi_1(x) - \varphi_1(x) > 0,$$

так как получится, что

$$\Lambda_{\Phi_1\varphi_1}[\Phi_1(x) - \varphi_1(x)] > 0 > \Lambda_{\Phi_1\varphi_1}[0] = -\frac{\nu_1(x)}{P[x, \Phi_1(x), \varphi_1(x)]}\Big).$$

Далее, можно будет показать, что

$$M[\varphi_2(x)] = \mu_2(x) < 0,$$
$$M[\Phi_1(x)] = \nu_2(x) > 0,$$

и продолжать построение функций ξ и η дальше. Мы перейдем сразу к *общему случаю*. Пусть у нас уже построены функции

$$\xi_0(x), \xi_1(x), \ldots, \xi_{n-1}(x),$$
$$\eta_0(x); \eta_1(x), \ldots, \eta_{n-1}(x),$$

и соответствующие им функции

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots \varphi_n(x);$$
$$\Phi_0(x), \Phi_1(x), \ldots \Phi_n(x),$$

причем

$$M[\varphi_k(x)] = \mu_k(x) < 0,$$
$$M[\Phi_k(x)] = \nu_k(x) > 0.$$

Определим функции $\xi_n(x)$ и $\eta_n(x)$ из уравнений

$$L_{\varphi_n}[\xi_n(x)] = 0,$$
$$\Lambda_{\Phi_n\varphi_n}[\eta_n(x)] = 0, \tag{24}$$

и положим

$$\varphi_{n+1}(x) = \varphi_n(x) + \xi_n(x),$$
$$\Phi_{n+1}(x) = \Phi_n(x) - \eta_n(x).$$

Покажем, что

$$\xi_n(x) > 0,$$
$$\eta_n(x) > 0. \tag{25}$$

В самом деле

$$L_{\varphi_n}[0] = \frac{\mu_n(x)}{\Phi_\varphi'[x_1\varphi_n(x)]} < 0,$$

$$\Lambda_{\Phi_n\varphi_n}[0] = -\frac{\nu_n(x)}{P[x, \Phi_n(x), \varphi_n(x)]} < 0;$$

отсюда на основании теоремы 2 получаем (25).

Докажем, что

$$\Phi_{n+1}(x) > \varphi_n(x),$$

или что

$$\eta_n(x) < \theta_n(x) = \Phi_n(x) - \varphi_n(x).$$

Вычисляя подобно тому, как это было сделано в (22), найдем

$$\Lambda_{\Phi_n\varphi_n}[\theta_n(x)] = -\frac{\mu_n(x)}{P[x, \Phi_n(x), \varphi_n(x)]} > 0.$$

Так как

$$\Lambda_{\Phi_n\varphi_n}[\eta_n(x)] = 0,$$

то отсюда следует по теореме 2, что

$$\theta_n(x) > \eta_n(x) > 0.$$

Этим доказано, что

$$\Phi_n(x) > \varphi_n(x).^{1)}$$

Наконец можно показать, что

$$M[\varphi_{n+1}(x)] < 0,$$
$$M[\Phi_{n+1}(x)] > 0.$$

Применяя формулы (I) и (II), имеем

$$M[\varphi_{n+1}(x)] = \frac{1}{2}\Phi''_{\varphi\varphi}[x, \bar{\varphi}_{n+1}(x)]\xi_n^2(x) = \mu_{n+1}(x) < 0,$$
$$M[\Phi_{n+1}(x)] = -\frac{1}{2}\Phi''_{\varphi\varphi}[x\,\bar{\bar{\varphi}}_{n+1}(x)]\eta_n(x)[\Phi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)] = \nu_{n+1}(x) > 0. \tag{26}$$

1) Этот пункт касается уже построенных ранее функций $\Phi_n(x)$ и $\varphi_n(x)$, однако, доказательство его только в этом месте вполне законно, так как предположением $\Phi_n > \varphi_n$ мы при построении $\Phi_{n+1}(x)$ и $\varphi_{n+1}(x)$ не пользовались.

5. Таким образом, мы построили *две бесконечные последовательности функций*:

$$\Phi_0(x) > \Phi_1(x) > \ldots > \Phi_n(x) > \ldots,$$

$$\varphi_0(x) < \varphi_1(x) < \ldots < \varphi_n(x) < \ldots.$$

Каждая из функций первой последовательностя при этом *больше* каждой функции из второй. Очевидно, что каждая из этих последовательностей сходится; пусть

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_n(x) = \overline{\varphi}(x)$$

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \underline{\varphi}(x).$$

Так как

$$\Phi_n(x) = \Phi_0(x) - \sum_0^{n-1} \eta_k(x),$$

$$\varphi_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_0^{n-1} \xi_k(x),$$

то для $\eta_k(x)$ и $\xi_k(x)$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} \eta_n(x) = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \xi_n(x) = 0.$$

Из (26) получаем тогда

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(x) = 0,$$

(27)

$$\lim_{n\to\infty} \nu_n(x) = 0,$$

так как $\Phi''_{\varphi\varphi}$ — ограничена, так же, как и $\Phi_{n+1} - \varphi_n < \Phi_0 - \varphi_0$. Докажем теперь, что

$$\overline{\varphi}(x) = \underline{\varphi}(x),$$

т. е. что последовательности Φ и φ стремятся к *общему пределу*. Для этого достаточно будет показать, что

(28)

$$\lim_{n\to\infty} \theta_n(x) = 0,$$

где

$$\theta_n(x) = \Phi_n(x) - \varphi_n(x).$$

Мы имеем

$$M[\Phi_n(x)] = \nu_n(x)$$

$$M[\varphi_n(x)] = \mu_n(x).$$

Вычитая, получаем:

$$\Phi[x, \Phi_n(x)] - \Phi[x, \varphi_n(x)] - \lambda \int_a^b K(x,s)[\Phi_n(s) - \varphi_n(s)]\,ds = \nu_n(x) - \mu_n(x).$$

Отсюда находим для $\theta_n(x)$ такое уравнение:

$$P[x, \Phi_n(x), \varphi_n(x)]\,\theta_n(x) - \lambda \int_a^b K(x;s)\,\theta_n(s)\,ds = \nu_n(x) - \mu_n(x).$$

Вводя обозначения

$$Q > \max\left[\frac{K(x,s)}{P[x, \Phi_n(x), \varphi_n(x)]}\right], \qquad (n = 1, 2 \ldots)$$

$$\varepsilon_n = \max\left[\frac{\nu_n(x) - \mu_n(x)}{P[x, \Phi_n(x), \varphi_n(x)]}\right],$$

можем написать для

$$\lambda < \frac{1}{Q(b-a)}$$

неравенство

$$|\theta_n(x)| < \frac{\varepsilon_n}{1 - \lambda Q(b-a)},$$

а так как $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ (см. (27)) то отсюда следует (28).

Итак, *последовательности* Φ_n *и* φ_n *сходятся и притом к общему пределу* φ. Мы покажем, что *для этого* φ *выполняется равенство*

$$M[\varphi] = 0,$$

т. е. *этот предел является решением уравнения (14)*. Для этого рассмотрим подробно одну из последовательностей, а именно — последовательность $\varphi_n(x)$.

Мы видели, что

$$\varphi_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_0^{n-1} \xi_k(x),$$

причем функции $\xi_k(x)$ определяются из уравнений

$$L_{\varphi_k}[\xi_k(x)] = 0,$$

или, выписывая это уравнение подробнее и учитывая (26),

$$\xi_k(x) = \lambda \int_a^b \frac{K(x,s)}{\Phi_\varphi'[x, \varphi_k(x)]}\,\xi_k(s)\,ds - \frac{1}{2}\,\frac{\Phi''_{\varphi\varphi}[x, \bar{\varphi}_k(x)]}{\Phi_\varphi'[x, \varphi_k(x)]}\,\xi^2_{k-1}(x).$$

Так как по условию $\Phi_\varphi' > 0$, то обе дроби в правой части будут ограничены в области G; обозначая ограничивающие их абсолютные величины константы буквами Q и $2T$, а максимум модуля $\xi_k(x)$ через Ξ_k, очевидно получим

$$\Xi_k < \lambda Q(b-a)\,\Xi_k + T\Xi^2_{k-1},$$

откуда

$$\Xi_k < \frac{T}{1-\lambda Q(b-a)}\,\Xi_k^2 .$$

Вводя обозначение

$$\frac{T}{1-\lambda Q(b-a)} = \gamma,$$

получим отсюда

$$\Xi_{k+n} < \frac{(\gamma\,\Xi_k)^{2^n}}{\gamma}. \tag{29}$$

Так как согласно доказанному выше

$$\lim_{n\to\infty} \xi_n(x) = 0,$$

можно указать такое k, что

$$\Xi_k = \varkappa < \frac{1}{\gamma}.$$

Тогда из (29) будет следовать

$$|\xi_{k+n}(x)| < \frac{(\gamma\varkappa)^{2^n}}{\gamma}, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

что доказывает равномерную сходимость ряда ξ_k и последовательности φ_k. Но если так, то можно написать

$$M[\varphi(x)] = M[\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)] = \lim_{n\to\infty} M[\varphi_n(x)] = \lim_{n\to\infty} \mu_n(x) = 0$$

(см. (27)). Таким образом, мы доказали, что наши *последовательности* $\Phi_n(x)$ *и* $\varphi_n(x)$ *сходятся к функции* $\varphi(x)$, *являющейся решением уравнения (14);* так как мы не предполагали при этом существования этого решения, мы его доказали.[1])

6. Мы построили две последовательности Φ_n и φ_n, удовлетворяющих неравенствам

$$\varphi_0 < \varphi_1 < \ldots < \varphi_n < \ldots < \varphi < \ldots < \Phi_n < \ldots < \Phi_0 < \Phi_0,$$

(это следует из формул (26) и теоремы 4) и сходящихся к решению $\varphi(x)$ уравнения (14). Построение функций $\varphi_n(x)$ и $\Phi_n(x)$ требовало решения линейных интегральных уравнений (24). Сейчас мы обратимся к построению последовательностей функций Φ_n^* и φ_n^*, апроксимирующих сверху и снизу решение φ уравнения (14) и удовлетворяющих уже не *уравнениям* (24), а некоторым *линейным интегральным неравенствам.*

[1]) В предположении, что могут быть найдены функции Φ_0, и φ_0, удовлетворяющие (15)

Мы будем исходить из прежних функций φ_0 и Φ_0, а вместо $\xi_0(x)$ и $\eta_0(x)$ выберем другие функции $\xi_0^*(x)$ и $\eta_0^*(x)$ так, чтобы были выполнены условия:

$$\text{a)}\ \xi_0^*(x) > 0, \quad \eta_0^*(x) > 0.$$

(30)

$$\text{b)}\ L_{\varphi_0}[\xi_0^*(x)] = \omega_0(x) < 0,$$

$$\Lambda_{\Phi_0\varphi_0}[\eta_0^*(x)] = \Omega_0(x) < 0.$$ [1]

Положим

$$\varphi_1^*(x) = \varphi_0(x) + \xi_0^*(x),$$

$$\Phi_1^*(x) = \Phi_0(x) - \eta_0^*(x),$$

и введем обозначения

$$\varphi(x) - \varphi_0(x) = \sigma_0(x),$$

$$\Phi_0(x) - \varphi(x) = \tau_0(x).$$

Легко видеть, что

(31)

$$\xi_0^*(x) < \sigma_0(x),$$

$$\eta_0^*(x) < \tau_0(x).$$

Чтобы обнаружить это, вычислим по формулам (I) и (II)

$$M[\varphi(x)] = M[\varphi_0(x) + \sigma_0(x)] = M[\Phi_0(x) - \tau_0(x)] = 0.$$

Применяя (I), получим

$$\Phi_\varphi'[x, \varphi_0(x)]\, L_{\varphi_0}[\sigma_0(x)] + \frac{1}{2}\Phi_{\varphi\varphi}''[x, \tilde{\varphi}_0(x)]\, \sigma_0^2(x) = 0,$$

откуда

$$L_{\varphi_0}[\sigma_0(x)] = -\frac{1}{2}\frac{\Phi_{\varphi\varphi}''[x, \tilde{\varphi}_0(x)]}{\Phi_\varphi'[x, \varphi_0(x)]}\sigma_0^2(x) > 0$$

(согласно (23)); так как по условию (30) имеем

$$L_{\varphi_0}[\xi_0^*(x)] < 0,$$

[1] Для выполнения условий a) достаточно взять ω_0 и Ω_0 так, чтобы было

$$|\omega_0(x)| < \left|\frac{M[\varphi_0(x)]}{\Phi'\varphi[x, \varphi_0(x)]}\right|,$$

$$|\Omega_0(x)| < \left|\frac{M[\Phi_0(x)]}{P[x, \Phi_0(x), \varphi_0(x)]}\right|.$$

Тогда очевидно будем иметь

$$L_{\varphi_0}[\xi_0^*(x)] < L_{\varphi_0}[0]$$

$$\Lambda_{\Phi_0\varphi_0}[\eta_0^*(x)] < \Lambda_{\Phi_0\varphi_0}[0],$$

откуда, на основании теоремы 2, получим a).

то отсюда по теореме 2 следует первое из неравенств (31). Аналогично (II) дает:

$$-P[x, \Phi_0(x), \varphi_0(x)]\,\Lambda_{\Phi_0\varphi_0}[\tau_0(x)] - \frac{1}{2}\Phi''_{\varphi\varphi}[x, \tilde{\Phi}_0(x)]\,\tau_0(x)\,\sigma_0(x) = 0,$$

так как второй множитель последнего члена равен

$$\Phi_0(x) - \tau_0(x) - \varphi_0(x) = \varphi(x) - \varphi_0(x) = \sigma_0(x).$$

Отсюда

$$\Lambda_{\Phi_0\varphi_0}[\tau_0(x)] = -\frac{1}{2}\,\frac{\Phi''_{\varphi\varphi}[x, \tilde{\Phi}_0(x)]}{P[x, \Phi_0(x), \varphi_0(x)]}\,\tau_0(x)\,\sigma_0(x) > 0,$$

что в соединении с (30) дает второе неравенство (31).

Покажем затем, что

$$M[\varphi_1^*(x)] < 0,$$
$$M[\Phi_1^*(x)] > 0.$$

Применяя (I), получаем

$$M[\varphi_1^*(x)] = \Phi'_\varphi[x, \varphi_0(x)]\,\omega_0(x) + \frac{1}{2}\Phi''_{\varphi\varphi}[x, \tilde{\varphi}(x)]\,[\xi_0^*(x)]^2 < 0,$$

согласно (30) и (23); используя (II), находим

$$M[\Phi_1^*(x)] = -P[x, \Phi_0(x), \varphi_0(x)]\,\Omega_0(x) -$$
$$-\frac{1}{2}\Phi''_{\varphi\varphi}[x, \tilde{\Phi}_0(x)]\,\eta_0^*(x)\,[\Phi_1^*(x) - \varphi_0(x)],$$

что положительно в виду (30) и (28), а также того, что согласно (31)

$$\Phi_1^*(x) > \varphi(x) > \varphi_0(x).$$

Обозначая для дальнейшего $M[\varphi_1^*]$ через μ_1^* и $M[\Phi_1^*]$ через ν_1^*, имеем, следовательно,

$$\mu_1^*(x) < 0,$$
$$\nu_1^*(x) > 0.$$

Теперь определяем функции $\xi_1^*(x)$ и $\eta_1^*(x)$ так, чтобы:

$$\text{a)}\ \xi_1^*(x) > 0, \quad \eta_1^*(x) > 0;$$
$$\text{b)}\ L_{\varphi_1^*}[\xi_1^*(x)] = \omega_1(x) < 0,$$
$$\Lambda_{\Phi_1^*\varphi_1^*}[\eta_1^*(x)] = \Omega_1(x) < 0.$$

Полагая

$$\varphi_2^*(x) = \varphi_1^*(x) + \xi_1^*(x),$$
$$\Phi_2^*(x) = \Phi_1^*(x) - \eta_1^*(x),$$

легко установить что

$$\Phi_1^*(x) > \Phi_2^*(x) > \varphi(x) > \varphi_2^*(x) > \varphi_1^*(x),$$

а также, что

$$\mu_2^*(x) = M[\varphi_2^*(x)] < 0,$$

$$\nu_2^*(x) = M[\Phi_2^*(x)] > 0.$$

Продолжая построение, мы приходим к системам функций Φ_n^* и φ_n^*, являющихся верхними и нижними функциями для φ. Допустим, что нами построены функции до номера n включительно, и разберем построение следующих.

Определим функции $\xi_n^*(x)$ и $\eta_n^*(x)$ так, чтобы

(32)

$$\text{a) } \xi_n^*(x) > 0, \quad \eta_n^*(x) > 0;$$

$$\text{b) } L_{\varphi_n^*}[\xi_n^*(x)] = \omega_n(x) < 0,$$

$$\Lambda_{\Phi_n^*\varphi_n^*}[\eta_n^*(x)] = \Omega_n(x) < 0,$$

и положим

$$\varphi_{n+1}^*(x) = \varphi_n^*(x) + \xi_n^*(x),$$

$$\Phi_{n+1}^*(x) = \Phi_n^*(x) - \eta_n^*(x).$$

Пусть кроме того,

$$\varphi(x) - \varphi_n^*(x) = \sigma_n(x),$$

$$\Phi_n^*(x) - \varphi(x) = \tau_n(x).$$

Подобно тому, как это было сделано для σ_0 и τ_0, мы получим

$$L_{\varphi_n^*}[\sigma_n(x)] = -\frac{1}{2}\frac{\Phi''_{\varphi\varphi}[x, \bar{\varphi}_n^*(x)]}{\Phi_\varphi'[x, \varphi_n^*(x)]}\sigma_n^2(x) > 0,$$

$$\Lambda_{\Phi_n^*\varphi_n^*}[\tau_n(x)] = -\frac{1}{2}\frac{\Phi''_{\varphi\varphi}[x, \bar{\Phi}_n^*(x)]}{P[x, \Phi_n^*(x), \varphi_n^*(x)]}\tau_n(x)\sigma_n(x) > 0,$$

что, в соединении с (32), дает на основании теоремы 2

$$\xi_n^*(x) < \sigma_n(x),$$

$$\eta_n^*(x) < \tau_n(x).$$

Это значит, что

(33) $$\Phi_n^*(x) > \Phi_{n+1}^*(x) > \varphi(x) > \varphi_{n+1}^*(x) > \varphi_n^*(x).$$

Кроме того легко видеть, что

$$M[\varphi_{n+1}^*(x)] < 0,$$

$$M[\Phi_{n+1}^*(x)] > 0.$$

Применяя (I) и (II), получаем

$$\mu_{n+1}^*(x) = M[\varphi_{n+1}^*(x)] = \Phi_\varphi'[x, \varphi_n^*(x)]\,\omega_n(x) + \tag{34}$$
$$+ \frac{1}{2}\Phi_{\varphi\varphi}''[x, \tilde{\varphi}_n^*(x)][\xi_n^*(x)]^2 < 0,$$

$$\nu_{n+1}^*(x) = M[\Phi_{n+1}^*(x)] = -P[x, \Phi_n^*(x), \varphi_n^*(x)]\,\Omega_n(x) -$$
$$-\frac{1}{2}\Phi_{\varphi\varphi}''[x, \tilde{\Phi}_n^*(x)]\,\eta_n^*(x)[\Phi_{n+1}^*(x) - \varphi_n^*(x)] > 0,$$

по (32), (23) и (33).

Таким образом, мы построили две последовательности функций Φ_n^* и φ_n^*, таких, что

$$\varphi_0 < \varphi_1^* < \varphi_2^* < \ldots < \varphi_n^* < \ldots < \varphi < \ldots < \Phi_n^* < \ldots < \Phi_1^* < \Phi_0.$$

Очевидно, что каждая из этих последовательностей *сходится*, и притом к φ, если

$$\lim_{n\to\infty} \omega_n(x) = \lim_{n\to\infty} \Omega_n(x) = 0. \tag{35}$$

В самом деле: из сходимости этих последовательностей мы имеем

$$\lim_{n\to\infty} \xi_n^*(x) = 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} \eta_n^*(x) = 0,$$

что по формулам (34) приводит к

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n^*(x) = 0, \tag{36}$$
$$\lim_{n\to\infty} \nu_n^*(x) = 0,$$

если выполнено (35). А тогда легко доказать, что

$$\theta_n^*(x) = \Phi_n^*(x) - \varphi_n^*(x)$$

стремится к нулю. Так как

$$M[\Phi_n^*(x)] = \nu_n^*(x),$$
$$M[\varphi_n^*(x)] = \mu_n^*(x),$$

имеем

$$M[\Phi_n^*(x)] - M[\varphi_n^*(x)] = \nu_n^*(x) - \mu_n^*(x),$$

откуда, подобно тому как это было сделано раньше, получаем

$$P[x, \Phi_n^*(x), \varphi_n^*(x)]\,\theta_n^*(x) - \lambda\int_a^b K(x,s)\,\theta_n^*(s)\,ds = \nu_n^*(x) - \mu_n^*(x),$$

что приводит к оценке

$$|\theta_n^*(x)| < \frac{\varepsilon_n^*}{1-\lambda Q(b-a)}. \tag{37}$$

Здесь

$$\varepsilon_n^* = \max\left[\frac{\nu_n^*(x)-\mu_n^*(x)}{P[x,\Phi_n^*(x),\varphi_n^*(x)]}\right]$$

В силу (36)

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n^* = 0,$$

а значит и

$$\lim_{n\to\infty} \theta_n^*(x) = 0.$$

Таким образом

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n^*(x) = \lim_{n\to\infty} \Phi_n^*(x) = \varphi(x), \tag{38}$$

при условии, что

$$\lim_{n\to\infty} \omega_n(x) = \lim_{n\to\infty} \Omega_n(x) = 0. \tag{35}$$

III

7. Результаты, полученные до сих пор, можно резюмировать следующим образом: *мы сможем аппроксимировать с любой степенью точности решение уравнения (14), если найдем соответствующие аппроксимирующие функции для линейных интегральных уравнений;* именно об этом говорят соотношения (35)—(38). Поэтому мы приступим к построению функций, аппроксимирующих решение линейного уравнения

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi(s)\,ds;$$

При этом для построения последовательностей Φ_n^* и φ_n^* нам будут нужны, собственно говоря, только *нижние* функции, но так как задача аппроксимации решений линейных уравнений представляет самостоятельный интерес, а также из-за удобств оценки погрешностей, мы введем и верхние и нижние функции.

Для дальнейшего нам потребуется несколько лемм об алгебраических линейных уравнениях; к ним мы и перейдем.

Пусть мы имеем систему алгебраических линейных уравнений

$$\begin{aligned}
x_1 &= \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \ldots + \alpha_{1n}x_n + \beta_1,\\
x_2 &= \alpha_{21}x_1 + \alpha_{23}x_3 + \ldots + \alpha_{2n}x_n + \beta_2,\\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad \ldots \quad \ldots\\
x_n &= \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots + \alpha_{n(n-1)}x_{n-1} + \beta_n.
\end{aligned} \tag{39}$$

Тогда имеет место:

Лемма 1.[1] *Если в системе (36) имеем*

$$(40)\qquad {}^{*}\sum_{k}|\alpha_{ik}| \leqslant A < 1,^{2} \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

то эта система имеет единственное решение, которое может быть получено итерацией, и для этого решения имеет место оценка

$$(41)\qquad |x_i - \beta_i| < \frac{A \max|\beta_k|}{1-A} \text{ или } |x_i| < \frac{\max|\beta_k|}{1-A}.$$

Введем обозначения

$$(42)\qquad \begin{gathered} x_i^{(\nu+1)} = {}^{*}\sum_{k} \alpha_{ik} x_k^{(\nu)} + \beta_i, \\ x_i^{(0)} = \beta_i, \\ x_i^{(\nu)} - x_i^{(\nu+1)} = \delta_i^{(\nu+1)}. \end{gathered}$$

Таким образом

$$(43)\qquad x_i^{(\nu+1)} = x_i^{(0)} - \sum_{j=1}^{\nu+1} \delta_i^{(j)}$$

Очевидно, что $\delta_i^{(\nu+1)}$ удовлетворяют уравнениям

$$(44)\qquad \delta_i^{(\nu+1)} = {}^{*}\sum_{k} \alpha_{ik} \delta_k^{(\nu)},$$

откуда, обозначая $\max|\delta_i^{(\nu)}|$ через $\Delta^{(\nu)}$, получаем

$$|\delta_i^{(\nu+1)}| \leqslant {}^{*}\sum_{k} |\alpha_{ik}||\delta_k^{(\nu)}|$$

$$\Delta^{(\nu+1)} < A\Delta^{(\nu)} < A^{\nu}\Delta^{(1)}.$$

Но тогда

$$\left|\sum_{j=1}^{\nu+1} \delta_i^{(j)}\right| < \Delta^{(1)}(1 + A + A^2 + \ldots + A^{\nu}),$$

и следовательно

$$(45)\qquad \left|\sum_{j=1}^{\infty} \delta_i^{(j)}\right| < \frac{\Delta^{(1)}}{1-A};$$

очевидно, что это эквивалентно существованию предела

$$\lim_{\nu\to\infty} x_i^{(\nu)} = x_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

[1] Приводимое доказательство этой леммы принадлежит В. М. Ефименко, сообщившей его в осеннем семестре 1933 г. на одном из собраний руководимого автором семинара НИИММ.

[2] Знак ${}^{*}\sum_{k}$ означает суммирование по всем k от 1 до n, кроме $k = i$.

являющегося решением системы (39). Оценка (41) получается непосредственно из (43), (42) и (45), если заметить, что

$$\delta_i^{(1)} = x_i^{(0)} - x_i^{(1)} = \beta_i - \left[{}^*\sum_k \alpha_{ik}\beta_k + \beta_i\right] = -{}^*\sum_k \alpha_{ik}\beta_k,$$

т. е., что

$$\Delta^{(1)} < A \max |\beta_k|.$$

Наконец, чтобы установить единственность решения заметим, что x_i, будучи непрерывными функциями β_i в силу (41), стремятся к нулю, когда стремится к нулю β_i, т. е. система (39) при $\beta_i = 0$ имеет единственное решение $x_i = 0$; отсюда, согласно принципу Крамера, следует единственность решения при любых β_i.

Лемма 2.[1] *Если в системе (39) выполнено условие (40), и кроме того*

$$\alpha_{ik} \geqslant 0, \quad \beta_i > 0,$$

то $x_i > 0$.

В самом деле, согласно предыдущей лемме x_i существуют и могут быть найдены итерацией.

Это значит, что

$$x_i = \lim_{\nu\to\infty} x_i^{(\nu)},$$

причем $x_i^{(\nu)}$ получаются по формулам (42). Но в условиях леммы это дает

$$x_i^{(1)} > x_i^{(0)} = \beta_i,$$
$$x_i^{(2)} > x_i^{(1)},$$
$$\ldots$$
$$x_i^{(\nu)} > x_i^{(\nu-1)},$$

и, следовательно,

$$x_i = \lim x_i^{(\nu)} > \beta_i > 0.$$

8. Обратимся теперь к построению верхних и нижних функций для решения уравнения

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi(s)\,ds, \quad f(x) > 0.$$

[1] Эта лемма есть частный случай предложения, доказанного в работе проф. Б. М. Кояловича: «Исследования о бесконечных системах линейных уравнений», Известия Физико-математического института им. В. А. Стеклова, т. III, 1930, стр. 50. Следует заметить еще и то, что рассуждения, применяемые при доказательстве леммы 1 предыдущей страницы текста настоящей работы, совершенно аналогичны тем, которые применяются при доказательстве теорем IV и V вышеупомянутой статьи (см. стр. 56—57) проф. Б. М. Кояловича. См. также работу Р. О. Кузьмина «Об одном классе бесконечных систем линейных уравнений», ИМЕН, 1934, № 4, стр. 515—546, § 1.

Разделим интервал (a, b) на m равных частей и назовем k-тый интервал g_k. Определим функции $\psi_m(x)$ и $\Psi_m(x)$ так, чтобы

$$\text{(47)}\qquad \begin{aligned} &\text{I)}\ \psi_m(x) = a_k^{(m)},\ \Psi_m(x) = b_k^{(m)} \text{ на } g_k, \\ &\text{II)}\ \psi_m(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant \Psi_m(x). \end{aligned}$$

Для этого достаточно выбрать постоянные $a_k^{(m)}$ и $b_k^{(m)}$ следующим образом. Пусть

$$\text{(48)}\qquad \begin{aligned} K_\nu^{(m)}(x) &= \int_{g_k} K(x,s)\,ds, \\ \overline{K}_{\nu k}^{(m)} &= \max K_\nu^{(m)}(x) \text{ на } g_k, \\ \underline{K}_{\nu k}^{(m)} &= \min K_\nu^{(m)}(x) \text{ на } g_k, \\ \overline{f}_k^{(m)} &= \max f(x) \text{ на } g_k, \\ \underline{f}_k^{(m)} &= \min f(x) \text{ на } g_k. \end{aligned}$$

Определяем тогда $a_i^{(m)}$ и $b_i^{(m)}$ из уравнений

$$\text{(49)}\qquad \begin{aligned} a_i^{(m)} &= \underline{f}_i^{(m)} + \lambda \sum_{\nu=1}^{m} \underline{K}_{\nu i}^{(m)} a_\nu^{(m)}, \\ b_i^{(m)} &= \overline{f}_i^{(m)} + \lambda \sum_{\nu=1}^{m} \overline{K}_{\nu i}^{(m)} b_\nu^{(m)}. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что при

$$\text{(50)}\qquad \lambda < \frac{1}{M(b-a)}\ [K(x,y) < M]$$

эта система будет удовлетворять условиям (41) и (46). Последнее — очевидно, что же касается первого, то имеем из (49)

$$b_i^{(m)}\left(1 - \lambda \overline{K}_{ii}^{(m)}\right) = \overline{f}_i^{(m)} + \lambda^* \sum_{\nu} \overline{K}_{\nu i}^{(m)} b_\nu^{(m)}\ ^{1)}$$

т. е.

$$^*\sum_k |\alpha_{ik}| = \frac{\lambda^* \sum_\nu \overline{K}_{\nu i}^{(m)}}{1 - \lambda \overline{K}_{ii}^{(m)}},$$

и условию (41) соответствует в нашем случае условие

$$\frac{\lambda^* \sum_\nu \overline{K}_{\nu i}^{(m)}}{1 - \lambda \overline{K}_{ii}^{(m)}} < 1,$$

[1]) Мы рассматриваем случай b_i, так как для них коэффициенты больше.

или

$$\lambda \sum_{\nu}{}^{*} \overline{K}_{\nu i}^{(m)} < 1 - \lambda \overline{K}_{ii}^{(m)},$$

откуда

$$\lambda < \frac{1}{\sum_{1}^{m} \overline{K}_{\nu i}^{(m)}}. \tag{51}$$

Займемся суммой $\sum_{1}^{m} \overline{K}_{\nu i}^{(m)}$. Согласно (48) имеем

$$\begin{aligned} |K_{\nu}^{(m)}(x)| &\leqslant M \frac{b-a}{m}, \\ \overline{K}_{\nu i}^{(m)} &\leqslant M \frac{b-a}{m}; \end{aligned} \tag{52}$$

Отсюда

$$\sum_{1}^{m} \overline{K}_{\nu i}^{(m)} < m \cdot M \frac{b-a}{m} = M(b-a), \tag{53}$$

и из (50) à fortiori будет следовать (51), что и требуется.

Итак, к системе (49) при условии (50) применимы леммы 1 и 2. Из этого следует, в частности, что

$$a_i^{(m)} > 0, \quad b_i^{(m)} > 0. \tag{54}$$

Докажем теперь, что подобранные нами функции удовлетворяют условию (47, II). Подставим их в данное нам уравнение; если мы получим неравенства

$$\begin{aligned} \psi_m(x) &\leqslant f(x) + \lambda \int_a^b K(x,s)\psi_m(s)\,ds, \\ \Psi_m(x) &\geqslant f(x) + \lambda \int_a^b K(x,s)\Psi_m(s)\,ds, \end{aligned} \tag{55}$$

то, применяя теорему 2, получим (47, II). Будем поэтому проверять (55). Имеем, заменяя $\psi_m(x)$ и $\Psi_m(x)$ их выражениями (47, I):

$$\left.\begin{aligned} a_i^{(m)} &\leqslant f(x) + \lambda \sum_{\nu=1}^{m} K_{\nu}^{(m)}(x)\, a_{\nu}^{(m)} \\ b_i^{(m)} &\geqslant f(x) + \lambda \sum_{\nu=1}^{m} K_{\nu}^{(m)}(x)\, b_{\nu}^{(m)} \end{aligned}\right\} \text{ на } g_i. \tag{56}$$

Но эти неравенства выполняются, так как для любой точки $x_i = g_i$ мы имеем или соблюдение (49) — если одновременно

$$f(x_i) = f_i^{(m)}, \quad K_\nu^{(m)}(x_i) = K_{\nu i}^{(m)},$$

или же правая часть делается больше, если хотя бы одно из этих равенств не соблюдается, — тогда мы получаем (56). Совершенно аналогично обстоит дело со вторыми неравенствами. Таким образом *функции* $\Psi_m(x)$ и $\psi_m(x)$ *действительно являются искомыми верхними и нижними функциями.*

9. Докажем, что эти функции аппроксимируют решение φ нашего линейного уравнения с любой степенью точности при достаточно большом n. Для этого дадим оценку разности $b_i^{(m)} - a_i^{(m)}$.

Пусть

$$\begin{aligned} \overline{a}_i^{(m)} &= \underline{f}_i^{(m)} + \lambda \sum_\nu \frac{1}{2} [\overline{K}_{\nu i}^{(m)} + \underline{K}_{\nu i}^{(m)}] a_\nu^{(m)} \\ \underline{b}_i^{(m)} &= \overline{f}_i^{(m)} + \lambda \sum_\nu \frac{1}{2} [\overline{K}_{\nu i}^{(m)} + \underline{K}_{\nu i}^{(m)}] b_\nu^{(m)}. \end{aligned} \tag{57}$$

Очевидно, что

$$\overline{a}_i^{(m)} > a_i^{(m)}; \quad \underline{b}_i^{(m)} < b_i^{(m)},$$

так как

$$\overline{K}_{\nu i}^{(m)} > \frac{1}{2} [\overline{K}_{\nu i}^{(m)} + \underline{K}_{\nu i}^{(m)}] > \underline{K}_{\nu i}^{(m)}.$$

Заменим в правых частях свободные члены $\underline{f}_i^{(m)}$ и $\overline{f}_i^{(m)}$ на новые:

$$\underset{\sim}{f}_i^{(m)} \text{ и } \tilde{f}_i^{(m)}$$

так, чтобы

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{a}_i^{(m)} &= \underset{\sim}{f}_i^{(m)} + \lambda \sum_\nu \frac{1}{2} [\overline{K}_{\nu i}^{(m)} + \underline{K}_{\nu i}^{(m)}] a_\nu^{(m)}, \\ \tilde{b}_i^{(m)} &= \tilde{f}_i^{(m)} + \lambda \sum_\nu \frac{1}{2} [\overline{K}_{\nu i}^{(m)} + \underline{K}_{\nu i}^{(m)}] b_\nu^{(m)} \end{aligned} \tag{58}$$

оказались бы соответственно больше $a_i^{(m)}$ и меньше $b_i^{(m)}$. Для этого достаточно положить

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{f}_i^{(m)} &= \underline{f}_i^{(m)} - \lambda A^{(m)} \sum_\nu \frac{1}{2} [\overline{K}_{\nu i}^{(m)} - \underline{K}_{\nu i}^{(m)}], \\ \tilde{f}_i^{(m)} &= \overline{f}_i^{(m)} + \lambda B^{(m)} \sum_\nu \frac{1}{2} [K_{\nu i}^{(m)} - \underline{K}_{\nu i}^{(m)}], \end{aligned} \tag{59}$$

причем $A^{(m)} = \max a_\nu^{(m)}$, $B^{(m)} = \max b_\nu^{(m)}$ $(\nu = 1, 2 \ldots m)$.

Действительно

$$a_i^{(m)} = \underline{f}_i^{(m)} - \lambda A^{(m)} \sum_\nu \frac{1}{2}\left[\overline{K}_{\nu i}^{(m)} - \underline{K}_{\nu i}^{(m)}\right] + \lambda \sum_\nu \frac{1}{2}\left[\overline{K}_{\nu i}^{(m)} + \underline{K}_{\nu i}^{(m)}\right] a_\nu^{(m)} < \underline{f}_i^{(m)} - \lambda \sum_\nu \frac{1}{2}\left[\overline{K}_{\nu i}^{(m)} - \underline{K}_{\nu i}^{(m)}\right] a_\nu^{(m)} + \lambda \sum_\nu \frac{1}{2}\left[\overline{K}_{\nu i}^{(m)} + \underline{K}_{\nu i}^{(m)}\right] a_\nu^{(m)} = \underline{f}_i^{(m)} + \lambda \sum_\nu \underline{K}_{\nu i}^{(m)} a_\nu^{(m)} = a_i^{(m)};$$

аналогично убеждаемся в том, что

$$\bar{b}_i^{(m)} > b_i^{(m)}.$$

Кроме того, при достаточно большом m

$$a_i^{(m)} > 0;$$

чтобы убедиться в этом, достаточно показать, что

$$\lim_{m\to\infty} \sum_\nu \left[\overline{K}_{\nu i}^{(m)} - \underline{K}_{\nu i}^{(m)}\right] = 0; \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{60}$$

это будет иметь место в случае непрерывности $K(x, y)$ по обеим переменным. Пусть $K(x, y)$ — непрерывна; выберем такое m, чтобы на квадратиках со стороною $(b-a)/m$ колебание ее было меньше $\varepsilon/(b-a)$. Тогда, очевидно, колебание ω_i функции $K_i^{(m)}(x)$ на интервале g_i будет удовлетворять условию,

$$\omega_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot \frac{b-a}{m}$$

т. е.

$$\overline{K}_{\nu i}^{(m)} - \underline{K}_{\nu i}^{(m)} < \frac{\varepsilon}{m} \text{ на } g_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots m)$$

что дает

$$\sum_\nu \left[\overline{K}_{\nu i}^{(m)} - \underline{K}_{\nu i}^{(m)}\right] < \varepsilon, \qquad (i = 1, 2, \ldots m)$$

а следовательно и (60).

Итак мы нашли числа

$$\begin{aligned} &0 < a_i^{(m)} < \bar{a}_i^{(m)}, \\ &\bar{b}_i^{(m)} > b_i^{(m)} > 0. \end{aligned} \tag{61}$$

Будем определять числа $a_{ip}^{(m)}$ и $b_{ip}^{(m)}$ равенствами

$$\begin{aligned} a_{ip}^{(m)} &= \underline{f}_i^{(m)} + \lambda \sum_\nu \frac{1}{2}\left[\overline{K}_{\nu i}^{(m)} + \underline{K}_{\nu i}^{(m)}\right] a_{\nu(p-1)}^{(m)}, \\ b_{ip}^{(m)} &= \bar{f}_i^{(m)} + \lambda \sum_\nu \frac{1}{2}\left[\overline{K}_{\nu i}^{(m)} + \underline{K}_{\nu i}^{(m)}\right] b_{\nu(p-1)}^{(m)}, \end{aligned} \tag{62}$$

положив

$$a_{i0}^{(m)} = a_i^{(m)}, \quad b_{i0}^{(m)} = b_i^{(m)}.$$

В виду (58) и (61) будем иметь

$$a_{i1}^{(m)} < a_{i0}^{(m)} < a_i^{(m)},$$
$$b_{i1}^{(m)} > b_{i0}^{(m)} > a_i^{(m)},$$

и вообще

$$\left.\begin{aligned} a_{i(p+1)}^{(m)} &< a_{ip}^{(m)}, \\ b_{i(p+1)}^{(m)} &> b_{ip}^{(m)} \end{aligned}\right\} \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots) \tag{63}$$

Последовательности $\{a_{ip}^{(m)}\}$ *и* $\{b_{ip}^{(m)}\}$ *— сходятся*, так как их можно рассматривать как последовательные приближения при решении методой итерации систем

$$\left.\begin{aligned} A_i^{(m)} &= f_i^{(m)} + \lambda \sum_{\nu} \frac{1}{2}\left[\overline{K}_{\nu i}^{(m)} + \underline{K}_{\nu i}^{(m)}\right] A_\nu^{(m)}, \\ B_i^{(m)} &= \bar{f}_i^{(m)} + \lambda \sum_{\nu} \frac{1}{2}\left[\overline{K}_{\nu i}^{(m)} + \underline{K}_{\nu i}^{(m)}\right] B_\nu^{(m)}, \end{aligned}\right. \tag{64}$$

каждая из которых, при

$$\lambda < \frac{1}{M(b-a)}, \tag{50}$$

является системой, удовлетворяющей условиям лемм 1 и 2. Действительно, согласно (53)

$$\sum_{\nu} \overline{K}_{\nu i}^{(m)} < M(b-a),$$

откуда à fortiori.

$$\sum_{\nu} \frac{1}{2}\left[\overline{K}_{\nu i}^{(m)} + \underline{K}_{\nu i}^{(m)}\right] < M(b-a).$$

Но тогда по лемме 1 существует

$$\lim_{p\to\infty} a_{ip}^{(m)} = A_i^{(m)},$$
$$\lim_{p\to\infty} b_{ip}^{(m)} = B_i^{(m)},$$

причем $A_i^{(m)}$ и $B_i^{(m)}$ удовлетворяют уравнениям (64).
Пусть

$$\delta_i^{(m)} = B_i^{(m)} - A_i^{(m)}.$$

Очевидно для $\delta_i^{(m)}$ мы будем иметь

$$\delta_i^{(m)} = \bar{f}_i^{(m)} - \underline{f}_i^{(m)} + \lambda \sum_{\nu} \frac{1}{2}\left[\overline{K}_{\nu i}^{(m)} + \underline{K}_{\nu i}^{(m)}\right] \delta_\nu^{(m)};$$

применяя оценку (41) к $\delta_i^{(m)}$, имеем

$$\delta_i^{(m)} < \frac{\max\left[\bar{f}_i^{(m)} - \underline{f}_i^{(m)}\right]}{1 - \lambda M(b-a)}. \tag{65}$$

Но так как последовательность $\{a_{ip}^{(m)}\}$ — монотонно убывает, а $\{b_{ip}^{(m)}\}$ — монотонно возрастает,

$$A_i^{(m)} < a_i^{(m)},$$

$$B_i^{(m)} < b_i^{(m)},$$

и из (65) имеем à fortiori

$$b_i^{(m)} - a_i^{(m)} < \frac{\max\left[\bar{f}_i^{(m)} - \underline{f}_i^{(m)}\right]}{1 - \lambda M(b-a)},$$

откуда, имея в виду (59), получаем:

$$\boxed{b_i^{(m)} - a_i^{(m)} < \frac{\max\left[\bar{f}_i^{(m)} - \underline{f}_i^{(m)}\right] + \lambda \dfrac{A^{(m)} + B^{(m)}}{2} \sum_{\nu} \left[\bar{K}_{\nu i}^{(m)} - \underline{K}_{\nu i}^{(m)}\right]}{1 - \lambda M(b-a)}} \tag{66}$$

так как при $m \to \infty$ имеем

$$\lim_{m\to\infty} \max_{i=1,\ldots m} \left[\bar{f}_i^{(m)} - \underline{f}_i^{(m)}\right] = 0$$

для любой непрерывной $f(x)$, а кроме того при непрерывном $K(x, y)$ имеем (60), то

$$\lim_{m\to\infty} \left[b_i^{(m)} - a_i^{(m)}\right] = 0, \tag{67}$$

т. е.

$$\lim_{m\to\infty} \psi_m(x) = \lim_{m\to\infty} \Psi_m(x) = \varphi(x).$$

10. Теперь мы приступим к построению *последовательностей* Φ_n^* *и* φ_n^* (см. n° 6), *аппроксимирующих решение* φ *нелинейного уравнения (14)*. Когда мы разбирали в n°6 возможность такой аппроксимации, мы не установили точно вида функций ξ_n^* и η_n^*; теперь мы заполним этот пробел.

Итак, в соответствии с рассмотрениями n°6, пусть мы имеем две функции Φ_0 и φ_0 такие, что

$$M[\varphi_0(x)] = \mu_0(x) < 0,$$

$$M[\Phi_0(x)] = \nu_0(x) > 0.$$

Предположим, что эти функции φ_0 и Φ_0 *непрерывны*. Чтобы найти поправки ξ_0^* и η_0^* мы можем взять нижние функции (см. (30)) для решения ξ_0 и η_0 линейных уравнений

$$L_{\varphi_0}[\xi_0(x)] = 0,$$

$$\Lambda_{\Phi_0\varphi_0}[\eta_0(x)] = 0,$$

или, если написать эти уравнения подробнее [см. (11) и (13)]

$$\xi_0(x) = -\frac{\mu^0(x)}{\Phi_\varphi'[x, \varphi_0(x)]} + \lambda \int_a^b \frac{K(x,s)}{\Phi_\varphi'[x, \varphi_0(x)]}\, \xi_0(s)\, ds,$$

(68)

$$\eta_0(x) = \frac{\nu_0(x)}{P[x, \Phi_0(x), \varphi_0(x)]} + \lambda \int_a^b \frac{K(x,s)}{P[x, \Phi_0(x). \varphi_0(x)]}\, \eta_0(s)\, ds.$$

Введем обозначения:

$$u_n(x) = -\frac{\mu_n^*(x)}{\Phi_\varphi'[x' \varphi_n^*(x)]}, \qquad \mu_n^*(x) = M[\varphi_n^*(x)],$$

$$v_n(x) = \frac{\nu_n^*(x)}{P[x, \Phi_n^*(x), \varphi_n^*(x)]}, \qquad \nu_n^*(x) = M[\Phi_n^*(x)],$$

(69)

$$U_n(x,y) = \frac{K(x,y)}{\Phi_\varphi'[x, \varphi_n^*(x)]},$$

$$V_n(x,y) = \frac{K(x,y)}{P[x, \Phi_n^*(x), \varphi_n^*(x)]}.$$

Тогда очевидно можно переписать (68) в виде

$$\xi_0(x) = u_0(x) + \lambda \int_a^b U_0(x,s)\, \xi_0(s)\, ds,$$

$$\eta_0(x) = v_0(x) + \lambda \int_a^b V_0(x,s)\, \eta_0(s)\, ds.$$

В качестве функций ξ_0^* и η_0^* мы возьмем нижние функции для ξ_0 и η_0, составленные так, как это описано в n^0 8. Пусть интервал (a, b) разделен на m: частей; обозначим частичный интервал номера i через $g_i^{(0)}$ и введем обозначения

$$U_\nu^{(0)}(x) = \int_{g_\nu^{(0)}} U_0(x,s)\, ds,$$

(70)

$$V_\nu^{(0)}(x) = \int_{g_\nu^{(0)}} V_0(x,s)\, ds,$$

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}_{\nu k}^{(0)} &= \min U_\nu^{(0)}(x); \quad \underline{u}_k^{(0)} = \min u_0(x) \\ \underline{V}_{\nu k}^{(0)} &= \min V_\nu^{(0)}(x); \quad \underline{v}_k^{(0)} = \min v_0(x) \end{aligned}\right\} \text{ на } g_k^{(0)}.$$

Найдем постоянные $\alpha_i^{(0)}$ и $\beta_i^{(0)}$ из уравнений

$$\alpha_i^{(0)} = \underline{u}_i^{(0)} + \lambda \sum_\nu \underline{U}_{\nu i}^{(0)} \alpha_\nu^{(0)},$$

$$\beta_i^{(0)} = \underline{v}_i^{(0)} + \lambda \sum_\nu \underline{V}_{\nu i}^{(0)} \beta_\nu^{(0)}$$

и определим функции ξ_0^* и η_0^* так:

$$\xi_0^*(x) = \alpha_i^{(0)} \text{ на } g_i^{(0)},$$
$$\eta_0^*(x) = \beta_i^{(0)} \text{ на } g_i^{(0)}.$$

Из сказанного в n^0 8 ясно, что при таком определении будет выполнено как требование (30, b) [см. (55)], так и требование (30, a) [см. (54)]; следует отметить, что в силу (69) и (15) мы имеем

$$\underline{u}_k^{(0)} > 0, \qquad \underline{v}_k^{(0)} > 0. \qquad (k = 1, 2, \ldots m)$$

Когда мы нашли поправки ξ_0^* и η_0^*, мы получаем возможность построить функции

$$\Phi_1^*(x) = \Phi_0(x) - \eta_0^*(x),$$
$$\varphi_1^*(x) = \varphi_0(x) + \xi_0^*(x).$$

Эти функции в отличие от функций $\Phi_0(x)$ и $\varphi_0(x)$ будут разрывными в тех точках, в которых разрывны $\xi_0^*(x)$ и $\eta_0^*(x)$, т. е. в точках деления, множество которых мы будем называть P_0. Приступим теперь к построению следующих поправок ξ^*, и η_1^*. Для этого разобьем наш интервал (a, b) на m_1 частей, но при том так, чтобы

$$P_0 \subset P_1.$$

Введем по аналогии с (70) обозначения $\underline{U}_{vk}^{(1)}$, $\underline{V}_{vk}^{(1)}$, $\underline{u}_{vk}^{(1)}$ и $\underline{v}_{vk}^{(1)}$ и определим $\alpha_i^{(1)}$, $\beta_i^{(1)}$ из уравнений

$$\alpha_i^{(1)} = \underline{u}_i^{(1)} + \lambda \sum_\nu \underline{U}_{\nu i}^{(1)} \alpha_\nu^{(1)},$$
$$\beta_i^{(1)} = \underline{v}_i^{(1)} + \lambda \sum_\nu \underline{V}_{\nu i}^{(1)} \beta_\nu^{(1)}.$$

Тогда для определения ξ_1^* и η_1^* будут служить формулы

$$\xi_1^*(x) = \alpha_i^{(1)} \text{ на } g_i^{(1)},$$
$$\eta_1^*(x) = \beta_i^{(1)} \text{ на } g_i^{(1)}.$$

Зная ξ_1^* и η_1^*, найдем

$$\Phi_2^*(x) = \Phi_1^*(x) - \eta_1^*(x),$$
$$\varphi_2^*(x) = \varphi_1^*(x) + \xi_1^*(x).$$

Дальше отыскание поправок и определение приближающих функций идет таким же образом. В *общем случае* будем иметь

$$\xi_n^*(x) = \alpha_i^{(n)} \text{ на } g_i^{(n)}$$
$$\eta_n^*(x) = \beta_i^{(n)} \text{ на } g_i^{(n)}$$
$$\alpha_i^{(n)} = \underline{u}_i^{(n)} + \lambda \sum_\nu \underline{U}_{\nu i}^{(n)} \alpha_\nu^{(n)},$$
$$\beta_i^{(n)} = \underline{v}_i^{(n)} + \lambda \sum_\nu \underline{V}_{\nu i}^{(n)} \beta_\nu^{(n)}, \qquad (71)$$

причем

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}_{\nu i}^{(n)} &= \min U_\nu^{(n)}(x), \quad \underline{u}_i^{(n)} = \min u_n(x) \\ \underline{V}_{\nu i}^{(n)} &= \min V_\nu^{(n)}(x), \quad \underline{v}_i^{(n)} = \min v_n(x) \end{aligned}\right\} \text{ на интервале } g_i^{(n)} \tag{72}$$

$$U_\nu^{(n)}(x) = \int\limits_{g_\nu^{(n)}} U_n(x,s)\,ds$$

$$V_\nu^{(n)}(x) = \int\limits_{g_\nu^{(n)}} V_n(x,s)\,ds$$

и множество точек деления P_n таково, что

$$P_0 \subset P_1 \subset \ldots \subset P_n.$$

Чтобы доказать, что выбранные таким образом последовательности функций Φ_n^* и φ_n^* могут при подходящем подборе P_n аппроксимировать решение φ уравнения (14), нам придется показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \omega_n(x) = \lim_{n\to\infty} \Omega_n(x) = 0,$$

[см. (35)]. Здесь

$$\omega_n(x) = L_{\varphi_n^*}[\xi_n^*(x)],$$
$$\Omega_n(x) = \Lambda_{\Phi_n^*\varphi_n^*}[\eta_n^*(x)].$$

11. Для доказательства положения (35) нам потребуется одна лемма относительно решений линейных интегральных уравнений, которую мы сейчас и докажем.

Лемма 3. *Если $\varphi(x)$ есть решение уравнения*

$$L[\varphi(x)] = \varphi(x) - f(x) - \lambda \int\limits_a^b K(x,s)\varphi(s)\,ds = 0,$$

а функция $\psi(x)$ отличается от него на интервале (a, b) меньше, чем на ε,

$$|\psi(x) - \varphi(x)| < \varepsilon, \quad (a < x < b)$$

то

$$|L[\psi(x)]| < \varepsilon[1 + |\lambda| M(b-a)]; \quad M > |K(x,y)|.$$

В самом деле, по условию имеем

$$\psi(x) = \varphi(x) + \delta(x),$$
$$|\delta(x)| > \varepsilon \text{ на } (a,b).$$

Но

$$L[\psi(x)] = L[\varphi(x) + \delta(x)] = L[\varphi(x)] + \overline{L}[\delta(x)] = \overline{L}[\delta(x)], \tag{73}$$

где

$$\overline{L}[\delta(x)] = \delta(x) - \lambda \int\limits_a^b K(x,s)\delta(s)\,ds.$$

Поэтому

$$|\overline{L}[\delta(x)]| < \varepsilon + |\lambda| M(b-a)\varepsilon,$$

откуда и следует (73).

Приступим теперь к доказательству (35). Рассмотрим уравнения

$$L_{\varphi_n^*}[\pi_n(x)] = 0,$$

$$\Lambda_{\Phi_n^* \varphi_n^*}[\rho_n(x)] = 0.$$

Решение их $\pi_n(x)$ и $\rho_n(x)$ нам неизвестны, однако мы знаем, на сколько могут от них отличаться функции ξ_n^* и η_n^*. В самом деле, формула (66) дает нам оценку разности между *верхней* и *нижней функцией* для решения линейного уравнения и следовательно, à fortiori, разности между *самим решением и нижней функцией*. Применяя ее имеем:

$$|\pi_n(x) - \xi_n^*(x)| < \frac{\Delta u^{(n)} + C_1 \Delta U^{(n)}}{1 - \lambda Q(b-a)},$$

$$|\rho_n(x) - \eta_n^*(x)| < \frac{\Delta v^{(n)} + C_2 \Delta V^{(n)}}{1 - \lambda Q(b-a)}.$$

$$Q > \frac{K(x,y)}{\Phi_y'(x,y)}.$$

Здесь

$$\left.\begin{aligned} \Delta u^{(n)} &= \max(\overline{u}_i^{(n)} - \underline{u}_i^{(n)}), \\ \Delta U^{(n)} &= \max \sum_{\nu} \left[\overline{U}_{\nu i}^{(n)} - \underline{U}_{\nu i}^{(n)}\right], \\ \Delta v^{(n)} &= \max(\overline{v}_i^{(n)} - \underline{v}_i^{(n)}), \\ \Delta V^{(n)} &= \max \sum_{\nu} \left[\overline{V}_{\nu i}^{(n)} - \underline{V}_{\nu i}^{(n)}\right], \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots m_n) \tag{74}$$

$$\left.\begin{aligned} \overline{u}_i^{(n)} &= \max u_n(x), \qquad \overline{v}_i^{(n)} = \max v_n(x) \\ \overline{U}_{\nu i}^{(n)} &= \max U_\nu^{(n)}(x), \quad \overline{V}_{\nu i}^{(n)} = \max V_\nu^{(n)}(x), \end{aligned}\right\} \quad \text{на } g_i^{(n)} \text{ [ср. (72)]}$$

и C_1 и C_2 — постоянные, большие $\xi_n^*(x)$ и $\eta_n^*(x)$ (каковые существуют в виду стремления к нулю ξ_n^* и η_n^*). Но тогда по лемме 3 имеем

$$|L_{\varphi_n^*}[\xi_n^*(x)]| < [\Delta u^{(n)} + C_1 \Delta U^{(n)}] \frac{1 + \lambda Q(b-a)}{1 - \lambda Q(b-a)},$$

$$|\Lambda_{\Phi_n^* \varphi_n^*}[\eta_n^*(x)]| < [\Delta v^{(n)} + C_2 \Delta V^{(n)}] \frac{1 + \lambda Q(b-a)}{1 - \lambda Q(b-a)},$$

или

$$\left.\begin{aligned} |\omega_n(x)| &< C_3 \Delta u^{(n)} + C_4 \Delta U^{(n)}, \\ |\Omega_n(x)| &< C_5 \Delta v^{(n)} + C_6 \Delta V^{(n)}. \end{aligned}\right\} \tag{75}$$

Будем теперь увеличивать n. Каждая из функций $u_n(x)$, $v_n(x)$, $U_\nu^{(n)}(x)$, $V_\nu^{(n)}(x)$ разрывна самое большее на множестве P_n (в виду того, что

$$P_n \supset P_{n-1} \supset \ldots \supset P_1$$

и, следовательно, непрерывна в каждом из интервалов $g_i^{(n)}$, на которые разбит наш промежуток (a, b). Поэтому, если разбиение производится так, что каждый из интервалов $g_i^{(n)}$ стремится к нулю

$$g_i^{(n)} \to 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots m_n; \quad m_n \to \infty) \tag{76}$$

то стремятся к нулю и величины $\Delta u^{(n)}$, $\Delta v^{(n)}$, $\Delta U^{(n)}$, $\Delta V^{(n)}$ [см. (70)].

$$\lim_{n\to\infty} \Delta u^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \Delta v^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \Delta V^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \Delta V^{(n)} = 0,$$

откуда в виду (75) следует (35), а значит и (38). Таким образом, мы доказали, что, подбирая функции ξ_n^* и η_n^* по формулам (71), (72), (69) при условии (76) и полагая

$$\Phi_{n+1}^*(x) = \Phi_n^*(x) - \eta_n^*(x),$$
$$\varphi_{n+1}^*(x) = \varphi_n^*(x) + \xi_n^*(x),$$

мы получим две последовательности функций $\{\Phi_n^*\}$ и $\{\varphi_n^*\}$, аппроксимирующих сверху и снизу искомое решение уравнения (14) с любой степенью точности. Построение этих функций не требует при этом никаких операций, кроме решения систем обыкновенных линейных уравнений.

12. В виду того, что изложенная выше метода решения интегральных уравнений является вполне эффективной и позволяет на каждом этапе вычисления учитывать погрешности достигнутого приближения, ее можно применять как *практическую* методу для приближенного решения интегральных уравнений.

Мы рассмотрим подробнее возникающие здесь вопросы как для *линейных*, так и для *нелинейных* уравнений.

Если мы, имея в виду решить линейное интегральное уравнение, задались некоторой системой интервалов разбиения g_n числом m_n и построили по формулам (47), (48) и (49) пару функций ψ_m и Ψ_m, то мы тем самым получили вполне определенную область плоскости (x, y), в которой может лежать интересующее нас решение $y = \varphi(x)$ данного интегрального уравнения; эта область будет ограничена снизу ступенчатой линией $y = \psi_m(x)$, а сверху — линией $y = \Psi_m(x)$. Проводя внутри этой области каким-либо способом кривую $y = \varphi(x)$, мы можем, следовательно, быть уверены, что не отклонимся от решения больше, чем на величину разности $\Psi_m - \psi_m$.

Во многих случаях, однако, может быть желательным *сначала* оценить величину разности $\Psi_m - \psi_m$, еще не строя самих функций, и уже на основании этой оценки выбрать то или иное число интервалов разбиения. Ответ на этот вопрос может дать формула (66), которую для этих целей можно написать в более удобной форме. В формулу (66) входят величины

$$\left.\begin{aligned} A^{(m)} &= \max a_\nu^{(m)} \\ B^{(m)} &= \max b_\nu^{(m)} \end{aligned}\right\} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m_n)$$

Имея в виду (49) и оценку (41), можно вместо этих величин подставить

$$\underline{F}^{(m)} = \frac{\max \underline{f}_i^{(m)}}{1-\lambda M(b-a)} > A^{(m)},$$

$$\overline{F}^{(m)} = \frac{\max \overline{f}_i^{(m)}}{1-\lambda M(b-a)} > B^{(m)}, \tag{77}$$

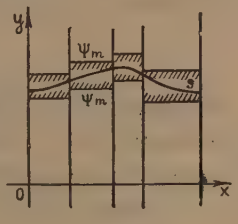
а для суммы $\sum_{\nu} \left[\overline{K}_{\nu i}^{(m)} - \underline{K}_{\nu i}^{(m)}\right]$ использовать оценку

$$\sum_{\nu} \left[\overline{K}_{\nu i}^{(m)} - \underline{K}_{\nu i}^{(m)}\right] > \Omega(b-a), \tag{78}$$

где Ω — наибольшее колебание $K(x, y)$ на квадратиках со стороною g_n [ср. доказательство формулы (60)]. Тогда получим

$$b_i^{(m)} - a_i^{(m)} < \frac{\max\left[\overline{f}_i^{(m)} - \underline{f}_i^{(m)}\right] + \frac{(\underline{F}^{(m)} + \overline{F}^{(m)})\Omega(b-a)}{2(1-\lambda M(b-a))}}{1-\lambda M(b-a)}. \tag{79}$$

Эта формула дает возможность оценки разности $\Psi_m - \psi_m$ непосредственно по известным нам величинам. Следует, однако, заметить, что оценка (79) будет вообще говоря, довольно грубой, и поэтому может привести к таким значениям числа интервалов разбиения, которое сделает решение соответствующей системы линейных уравнений (39) затруднительным.



Фиг. 2.

Поэтому во многих случаях более целесообразным будет другой путь: выбирая число интервалов разбиения не слишком большим, мы получим между кривыми $y = \Psi_m(x)$ и $y = \psi_m(x)$ некоторую область S (фиг. 2), составленную из прямоугольников. Искомое решение будет проходить внутри этой области. Изобразим его приближенно какой-либо кривой $y = \varphi(x)$ и попробуем оценить погрешность от такой замены. Здесь имеет место следующая простая теорема.

Теорема 5. *Пусть* $\varphi(x)$ *есть решение уравнения*

$$L[\varphi(x)] = \varphi(x) - f(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds = 0.$$

Если $L[\bar{\varphi}(x)] = \zeta(x)$, $|\zeta(x)| < \varepsilon$ *на* (a, b), *то*

$$\bar{\varphi}(x) - \frac{\varepsilon}{1-|\lambda| M(b-a)} < \bar{\varphi}(x) < \varphi(x) + \frac{\varepsilon}{1-|\lambda| M(b-a)}.$$

В самом деле, полагая

$$\chi(x) = \bar{\varphi}(x) - \varphi(x),$$

получаем для $\chi(x)$ уравнение

$$\chi(x) = \zeta(x) + \lambda \int_a^b K(x,s)\zeta(s)\,ds,$$

откуда

$$\max|\chi(x)| < \max|\zeta(x)| + |\lambda| M(b-a) \cdot \max|\zeta(x)|$$

или

$$|\chi(x)| < \frac{\varepsilon}{1-|\lambda| M(b-a)}$$ [1])

Подставляя вместо $\chi(x)$ ее значение, получаем отсюда требуемые неравенства.

Применяя эту теорему, мы можем значительно сузить ту область, в которой нам надо отыскать решение, и удачным подбором аппроксимирующих функций, контролируемым при помощи этой теоремы, получить решение с требуемой степенью точности быстрее, чем непосредственным применением изложенной выше методы.

Обратимся теперь к нелинейным уравнениям. Здесь так, же как и в случае линейных уравнений, вопрос об оценке погрешности разрешается сам собой, если фактически построены функции Φ_n^* и φ_n^*: искомое решение заключено между ними.

Так же, как и в случае линейных уравнений, можно поставить вопрос о предварительной оценке разности

$$\theta_n^*(x) = \Phi_n^*(x) - \varphi_n^*(x)$$

непосредственно по исходным данным: формулы (37), (34), (75) позволяют провести эту оценку, однако по указанным выше причинам мы этим заниматься не будем. И здесь нам больше может помочь теорема, аналогичная теореме 5.

Теорема 6. *Если* $\varphi(x)$*—решение уравнения*

$$M[\tilde{\varphi}(x)] = \Phi[x, \varphi(x)] - \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi(s)\,ds = 0,$$

а

$$M[\varphi(x)] = \zeta(x), \quad |\zeta(x)/\Phi'_y(x,y)| < \varepsilon_\Phi$$

в области G*, то*

$$\tilde{\varphi}(x) - \frac{\varepsilon_\Phi}{1-|\lambda| Q(b-a)} < \varphi(x) < \tilde{\varphi}(x) + \frac{\varepsilon_\Phi}{1-|\lambda| Q(b-a)}.$$

Здесь, как и раньше

$$Q > \left|\frac{K(x,y)}{\Phi'_y(x,y)}\right|, \quad \Phi'_y(x,y) \neq 0$$

в области G.

[1]) Мы предполагаем, разумеется, $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$.

Для доказательства достаточно положить

$$\chi(x) = \bar{\varphi}(x) - \varphi(x).$$

Тогда

$$M[\bar{\varphi}(x)] - M[\varphi(x)] = \Phi[x, \bar{\varphi}(x)] - \Phi[x, \varphi(x)] - \lambda \int_a^b K(x,s)\chi(s)\,ds = \zeta(x),$$

откуда

$$P[x, \bar{\varphi}(x), \varphi(x)]\chi(x) = \zeta(x) + \lambda \int_a^b K(x,s)\chi(s)\,ds$$

и

$$\chi(x) = \frac{\zeta(x)}{P[x, \bar{\varphi}(x), \varphi(x)]} + \lambda \int_a^b \frac{K(x,s)}{P[x, \bar{\varphi}(x), \varphi(x)]} \chi(s)\,ds.$$

А тогда

$$\max|\chi(x)| < \varepsilon_\Phi + |\lambda| Q(b-a) \cdot \max|\chi(x)|$$

и следовательно

$$|\chi(x)| < \frac{\varepsilon_\Phi}{1 - |\lambda| Q(b-a)},$$

что эквивалентно доказываемым неравенствам. Подбирая аппроксимирующие функции и проверяя их при помощи этой теоремы, мы часто можем сильно ускорить процесс решения.

В частности следует иметь в виду, что, получив аппроксимирующую функцию $\bar{\varphi}(x)$, для которой $M[\bar{\varphi}(x)] > 0$, можем рассматривать ее как верхнюю функцию или как нижнюю при $M[\bar{\varphi}(x)] < 0$.

Такими приемами, комбинируя изложенную выше методу с подбором аппроксимирующих функций наглаз, мы можем довольно легко получить с достаточной точностью решение уравнения вида (14).

13. В качестве примера применения этой методы мы рассмотрим решение уравнения

$$(80)\quad M[\varphi(x)] = 9\varphi^3(x) + (6x^2 + 8)\varphi(x) - 15x^3 - 7x - 3\int_0^1 xs\varphi(s)\,ds = 0,$$

которому удовлетворяет

$$\varphi(x) = x;$$

проводя приближенное решение, мы сможем сравнивать его с этим точным.

В нашем случае

$$\Phi[x, \varphi(x)] = 9\varphi^3(x) + (6x^2 + 8)\varphi(x) - 15x^3 - 7x,$$

$$\Phi_\varphi'[x, \varphi(x)] = 27\varphi^2(x) + (6x^2 + 8) > 0,$$

$$P[x, \psi(x), \varphi(x)] = 9\psi^2(x) + 9\psi(x)\varphi(x) + 9\varphi^2(x) + 6x^2 + 8.$$

В качестве функций $\Phi_0(x)$ и $\varphi_0(x)$ мы выбираем постоянные C и C', определив их так, чтобы было

$$M[\Phi_0(x)] > 0, \quad M[\varphi_0(x)] < 0.$$

Для выполнения первого условия должны иметь

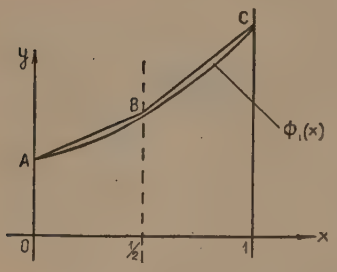
$$9C^3 + (6x^2 + 8)C - 15x^3 - 7x - 3x \cdot C \cdot \frac{1}{2} > 0;$$

очевидно достаточно взять

$$C = \gamma,$$

где γ — корень уравнения

$$9\gamma^3 + 7\gamma - 22 = 0.$$



Фиг. 3.

В качестве C' можно взять любое отрицательное число. За первые приближения были приняты:

$$\Phi_0(x) = 1.156 = \gamma$$
$$\varphi_0(x) = -0.100.$$

Поправки $\xi_0(x)$ и $\eta_0(x)$ вычислялись[1]) по уравнениям (16), причем для определения $\eta_0(x)$ служило уравнение

$$L_{\Phi_0}[\eta_0(x)] = 0,$$

так как в нашем примере $\Phi''_{\varphi\varphi} > 0$.

Выражения для $\eta_0(x)$ и $\xi_0(x)$ получились такими:

$$\eta_0(x) = \frac{-15x^3 + 6.936x^2 - 8.269x + 23.151}{6x^2 + 44.072},$$

$$\xi_0(x) = \frac{15x^3 + 0.600x^2 + 8.109x + 0.809}{6x^3 + 19{,}077},$$

по ним были вычислены $\Phi_1(x)$ и $\varphi_1(x)$. Вычисление $\Phi_2(x)$ и $\varphi_2(x)$ аналитическим путем по найденным $\Phi_1(x)$ и $\varphi_1(x)$ было бы затруднительно. Поэтому функция $\Phi_1(x)$ была заменена ломаной, составленной из двух хорд AB и BC (см. фиг. 3). При таком выборе $\Phi_1(x)$ (законность его была проверена вычислением $M[\Phi_1(x)]$, которое оказалось положительным) для $\eta_1(x)$ получилось выражение

$$\eta_1(x) = \begin{cases} \dfrac{-13.55485x^3 + 4.64085x^2 - 3{,}88560x + 7.30916}{7.35475x^2 + 7.63258x + 18.75035} & (0 \leqslant x \leqslant 0.5) \\ \dfrac{-10.14573x^3 + 6.65762x^2 - .40546x + 4.^{\circ}3875}{14.28673x^2 + 13.94086x + 13.86321} & (0.5 \leqslant x \leqslant 1) \end{cases}$$

Поправка $\xi_1(x)$ была вычислена аналогичным образом, но в отличие от $\eta_1(x)$, — чисто численными методами. В табл. 1 приведены результаты вычисления, а на фиг. 4 изображены соответствующие кривые и для сравнения — точное решение. Несмотря на нарочитую грубость исходных приближений, функция $\Phi_2(x)$ для $x = 1$ совпадает с точным решением уже до третьего знака включительно.

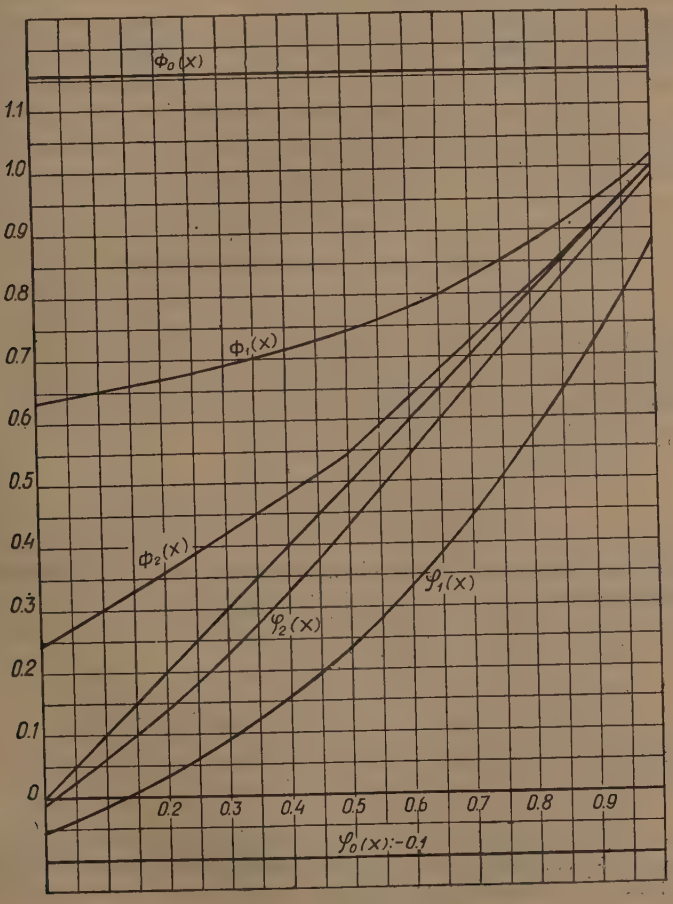
Научно-исследовательский институт математики и механики при МГУ

Москва, осень 1933 г.

[1]) Вычисления были проделаны А. И. Пожалостиным.

Таблица 1

x	$\Phi_0(x)$	$\Phi_1(x)$	$\Phi_2(x)$	$\varphi_0(x)$	$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(x)$
0.00	1.156	0.6310	0.2412	—0.100	—0.0576	—0.0169
0.10	1.156	0.6534	0.2984	—0.100	—0.0132	—0.0596
0.20	1.156	0.6758	0.3544	—0.100	0.0332	0.1359
0.30	1.156	0.6982	0.4128	—0.100	0.0892	0.2272
0.40	1.156	0.7206	0.4756	—0.100	0.1590	0.3251
0.50	1.156	0.7430	0.5451	—0.100	0.2350	0.4296
0.60	1.156	0.7984	0.6303	—0.100	0.3296	0.5413
0.70	1.156	0.8538	0.7187	—0.100	0.4414	0.6549
0.80	1.156	0.9092	0.8103	—0.100	0.5710	0.7672
0.90	1.156	0.9646	0.9049	—0.100	0.7175	0.8798
1.00	1.156	1.0200	1.0023	—0.100	0.8770	0.9823



Фиг. 4.

D. PANOW. ÜBER EINE ANWENDUNG DER METHODE VON S. TSCHAPLYGIN ZUR AUFLÖSUNG VON INTEGRALGLEICHUNGEN

ZUSAMMENFASSUNG

Die Methode von S. Tschaplygin [1]) ermöglicht bekanntlich den effektiven Aufbau zweier Funktionenfolgen y_ν und Y_ν, so dass

$$y_\nu < y < Y_\nu, \tag{1}$$

$$\lim y_\nu = \lim Y_\nu = y, \tag{2}$$

$$y_\nu^{(k)}(x_0) = Y_\nu^{(k)}(x_0) = y^{(k)}(x_0) = y_0^{(k)} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots (n-1)). \tag{3}$$

Mit y bezeichen wir hier die gesuchte Lösung der Differentialgleichung n-ter Ordnung, die den Anfangsbedingungen (3) genügt.

Die Konvergenz der Annäherungen (1) wird, wie N. Lusin[2]) festgestellt hat, von einem gewissen ν an ausserordentlich rasch; dadurch, sowie durch die Effektivitäs unterscheidet sich die Methode von S. Tschaplygin, vom Standpunkt der Praxis aus betrachtet, wesentlich von den der Idee nach ihr nahen Methoden sur Auffindung der Lösung von Differentialgleichungen (Methode von Perron)[3]). Die Grundidee der Methode Tschaplygin's kann auch auf die Lösung anderer Aufgaben erstreckt werden, im Besonderen auf die Auflösung von Integralgleichungen, sowohl von linearen, als auch von nichtlinearen von der Form

$$F(x, \varphi(x)) - \lambda \int_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, ds = 0$$

bei genügend kleinen Werten des Parameters λ.

Der Aufbau nach der erwähnten Methode erfolgt auf Grund der folgenden Fundamentalsätze über Integralungleichungen.

Satz 1. Wenn im Operator

$$\bar{L}[\psi(x)] = \psi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\, \psi(s)\, ds$$

für die beschränkte Funktion $K(x, y)$, die den in der Theorie der Integralgleichungen üblichen Stetigkeitsbedingungen genügt, die Bedingungen

$$\lambda K(x, y) > 0 \qquad (a \leqslant \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \leqslant b)$$

erfüllt sind, so folgt für

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)} \quad (M = \max |K(x, y)|)$$

aus der Ungleichung

$$\bar{L}[\psi_1(x)] > \bar{L}[\psi_0(x)]$$

[1]) S. Tschaplygin. Eine neue Methode zur angenäherten Intergration von Differentialgleichungen. Abhandlungen d. Zentralen Aero-Hydrodynamischen Institute (ZAGI), № 130.

[2]) Lusin. Über die Methode der angenäherten Integration von S. Tschaplygin. Ibid, № 141.

[3]) Perron. Math. Ann., 76 (471—484).

die Ungleichung

$$\psi_1(x) > \psi_0(x).^{1})$$

Satz 2. Wenn im Operator

$$M[\psi(x)] = \Phi[x, \psi(x)] - \lambda \int_a^b K(x, s)\psi(s\, d\, s$$

der Kern $\lambda K(x, y)$ den früheren Bedingungen genügt und die Funktion $\Phi(x, y)$ eine stetige Ableitung

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} > 0 \qquad (a \leqslant x \leqslant b, \quad y_1 < y < y_2)$$

besitzt, so folgt für

$$|\lambda| < \lambda_0 = \lambda_0 \quad \left(M, \max \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)$$

und für die Funktionen $\psi_1(x)$, $\psi_0(x)$ welche für $a \leqslant x \leqslant b$ im Streifen $y_1 < \psi < y_2$ liegen, aus der Ungleichung

$$M[\psi_1(x)] > M[\psi_0(x)]$$

die Ungleichung

$$\psi_1(x) > \psi_0(x).$$

Unter Benützung dieser Sätze können, bei einigen Zusatzbedingungen zwei Funktionenfolgen

$$\varphi_{\nu-1} < \varphi_\nu < \Phi_\nu < \Phi_{\nu-1} \qquad (\nu = 1, 2 \ldots) \tag{4}$$

aufgebaut werden, die gleichzeitig zur gemeinsamen Grenzfunktion φ konvergieren, diese erscheint als Lösung der Integralgleichung

$$M[\varphi] = 0, \tag{5}$$

für welche dadurch die Existenz der Lösung bewiesen ist. Die wesentlichste der oben erwähnten Zusatzbedingungen ist die Erhaltung des Vorzeichens von

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \quad \text{für} \quad a \leqslant x \leqslant b, \quad y_1 < y < y_2.$$

Der Aufbau der Folgen φ_ν und Φ_ν erfolgt durch sukzessive Berechnung der Korrekturen

$$\xi_\nu = \varphi_{\nu+1} - \varphi_\nu$$
$$\eta_\nu = \Phi_\nu - \Phi_{\nu+1}$$

die aus den linearen Integralgleichungen

$$L_{\varphi_\nu}[\xi_\nu(x)] = \frac{M[\varphi_\nu(x)]}{\Phi_\varphi'[x, \varphi_\nu(x)]} + \xi_\nu(x) - \lambda \int_a^b \frac{K(x, s)}{\Phi_\varphi'[x, \varphi_\nu(x)]} \xi_\nu(x)\, ds = 0 \tag{6}$$

$$\Lambda_{\Phi_\nu \varphi_\nu}[\eta_\nu(x)] = -\frac{M[\Phi_\nu(x)] \cdot [\Phi_\nu(x) - \varphi_\nu(x)]}{\Phi[x, \Phi_\nu(x)] - \Phi[x, \varphi_\nu(x)]} + \eta_\nu(x) - \tag{6}'$$

$$- \lambda \int_a^b \frac{K(x, s)[\Phi_\nu(x) - \varphi_\nu(x)]}{\Phi[x, \Phi_\nu(x)] - \Phi[x, \varphi_\nu(x)]} \eta_\nu(s)\, ds = 0$$

bestimmt werden.

1) Dasselbst gilt natürlich auch für $|\lambda| < \frac{1}{\sqrt{A}}$, wo $A = \int_a^b \int_a^b [K(x, y)]^2\, dxdy$ ist.

Die Konvergenz der Folgen (4) erweist sich, genau so wie bei der Methode von Tschaplygin, als sehr rasch $\left(\text{von der Ordnung } \frac{1}{2^{2^\nu}}\right)$.

Da die Lösung der Gleichungen (6) und (6′), welche die Korrekturen bestimmen, praktisch Schwierigkeiten bieten kann, betrachten wir im Folgenden eine Approximation der Lösung der Gleichung (5) durch solche Folgen von Funktionen φ_ν^* und Φ_ν^*, für welche die Korrekturen

$$\xi_\nu^* = \varphi_{\nu+1}^* - \varphi_\nu^*$$
$$\eta_\nu^* = \Phi_\nu^* - \Phi_{\nu+1}^*$$

aus linearen Integralungleichungen

$$L_{\varphi_\nu^*}[\xi_\nu^*] = \omega_\nu < 0, \tag{7}$$

$$\Lambda_{\Phi_\nu^*\,\varphi_\nu^*}[\eta_\nu^*] = \Omega_\nu < 0, \tag{7′}$$

bestimmt werden und bewiesen wird, dass unter der Bedingung

$$\lim_{\nu\to\infty} \omega_\nu = \lim_{\nu\to\infty} \Omega_\nu = 0$$

auch

$$\lim_{\nu\to\infty} \varphi_\nu^* = \lim_{\nu\to\infty} \Phi_\nu^* = \varphi$$

gilt.

Dadurch wird die Aufgabe der Lösung der Gleichung (5) auf eine praktisch wesentlich einfachere Aufgabe zurückgeführt: Funktionen ξ_ν^* und η_ν^* aufzufinden, die den Ungleichungen (7) und (7′) genügen.

Im besonderen wird diese Auffindung ermöglicht mit Hilfe unstetiger Funktionen die in Teilen des Intervalls (a, b) konstante Werte besitzen und zu deren Bestimmung nur Systeme algebraischer Gleichungen erster Ordnung gelöst werden müssen. Durch derartige Funktionen können mit beliebiger Genauigkeit die Lösungen sowohl nichtlinearer als auch linearer Integralgleichungen approximiert werden. Dies ergiebt (für kleine Werte λ) einen neuen Beweis des bekannten Hilbert'schen Satzes vom Grenzübergang von einem System algebraischer linearer Gleichungen zur Fredholm'schen Integralgleichung 2-ter Art.

Mathematisches Institut
der Universität Moskau.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1934
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

О КРИВОЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛАХ

В. С. ФЕДОРОВА

(*Представлено академиком* Н. Н. Лузиным)

Введение

Основная задача настоящей работы—установить простые достаточные условия обращения в нуль интегралов вида:

$$\oint_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz, \tag{1}$$

где L какая угодно спрямляемая *замкнутая* кривая, расположенная внутри данной односвязной и трехмерной области D обыкновенного пространства, отнесенной к системе прямоугольных координат x, y, z, и где P, Q, R — однозначные и непрерывные функции точки внутри этой области D. При этом мы не предполагаем, конечно, существования частных производных этих функций внутри области D.

§ 1

1. Прежде чем формулировать полученные автором условия, введем некоторые обозначения, которыми и будем пользоваться в дальнейшем. Кроме того, везде в настоящей работе мы будем называть замкнутые, простые и спрямляемые кривые просто «замкнутыми кривыми», так как не спрямляемых и не простых замкнутых кривых мы не будем рассматривать. Говоря о каких-либо точках или множествах точек (например, о кривых линиях и областях и т. п.), будем всегда предполагать, что эти точки и множества точек расположены внутри данной области D. Интеграл (1) обозначаем $J(V, L)$, где V вектор с проекциями: P, Q и R.

2. Определение. Мы скажем, что функции P, Q и R обладают свойством (X), если на всякой плоскости, перпендикулярной оси OX, существует бесконечная последовательность замкнутых кривых C_1, C_2, ..., C_n, ..., диаметры которых стремятся к нулю вместе с $\frac{1}{n}$ и для которых имеем:

$$J(V, C_n) = 0, \tag{2}$$

причем это равенство (2) сохраняется при всяком параллельном смещении кривой C_n на ее плоскости (как мы уже говорили, мы рассматриваем только те кривые, которые расположены внутри данной области D).

Аналогично определяются свойства (Y) и (Z) функций P, Q и R.

3. Определение. Мы скажем, что функции P, Q и R обладают свойством (X'), если вместо равенства (2) имеем: для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $n > 0$, что $|J(V, C_m)| < \varepsilon \cdot \text{mes}\,(C_m)$ для $m \geqslant n$ и при всяком параллельном смещении кривой C_m на ее плоскости.*

4. *Замечание:* в предыдущих определениях можно полагать, что C_n обозначает не одну кривую, а счетное множество замкнутых (простых и спрямляемых) кривых

$$C_n^{(1)},\ C_n^{(2)},\ \ldots,\ C_n^{(k)},\ \ldots$$

длины которых образуют сходящийся ряд, причем сумму этого ряда и называем длиной C_n и полагаем:

$$J(V, C_n) = \lim_{k=\infty} [J(V, C_n^{(1)}) + J(V, C_n^{(2)}) + \ldots + J(V, C_n^{(k)})].$$

5. Определение: мы будем говорить, что функции P, Q и R обладают свойством (L), если имеем равенство

$$J(V, L) = 0$$

для *всякой* замкнутой кривой L (расположенной внутри области D).

6. В § 4 докажем теорему:

Теорема I. *Всякие однозначные и непрерывные функции P Q и R, обладающие одновременно свойствами* (X), (Y) и (Z), *или свойствами* (X') (Y') и (Z'), *обладают свойством* (L).

7. Доказав эту теорему, мы изучаем такие функции P, Q и R, которые обладают нижеперечисленными свойствами во всякой точке области D или *почти всюду* в этой области (*почти всюду в области D* означает: во всех точках множества D—E, где E есть множество, объемная мера которого равна нулю).

Определение: мы скажем, что однозначная и измеримая функция $f(M)$, где M—любая точка внутри области D, обладает внутри этой области свойством (Δ), если существует такая положительная и суммируемая внутри области D функция $\Psi(M)$ и такое число $\delta > 0$, что для всякой сферы с центром в любой точке M и расположенной внутри области D имеем:

$$\frac{1}{\omega}\int \frac{|f(M) - f(M')|}{MM'}\, d\omega \leqslant \Psi(M);\quad \ldots(\Delta)$$

* (C_m) обозначает конечную область, ограниченную кривой C_m, а $mes\,(C_m)$ есть площадь этой области.

если $\omega < \delta$, где ω—объем сферы (интегрирование респространено на множество всех точек M', образующих «внутренность» сферы) $\overline{MM'}$ есть расстояние точек M и M'. Конечно, функция $f(M)$ предполагается такой, что имеет смысл интеграл левой части формулы (Δ).

8. Везде в дальнейшем обозначаем область, ограниченную сферической поверхностью с центром в точке (x, y, z) и радиусом R, через $S(x, y, z; R)$.

Полагаем $S = S(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}; \rho)$ и рассмотрим выражение

$$H(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}; \rho) = \int\int\int_S \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x-\bar{x} & y-\bar{y} & z-\bar{z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dx\,dy\,dz, \qquad (3)$$

где $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ суть орты, так что $V = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$*

Определение: мы скажем, что функции P, Q и R обладают свойством (ρ) в точке (x, y, z), если имеем:

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{H(x, y, z; \rho)}{\rho^5} = 0.$$

9. В § 5 нами будет доказана следующая теорема:

Теорема II. *Всякие однозначные и непрерывные функции P, Q и R, обладающие внутри области D свойством (Δ) и почти всюду внутри этой области свойством (ρ), обладают в этом случае свойством (L).*

§ 2

1. Этот § посвящен доказательству некоторых простых свойств интегралов вида

$$\int_{(L)} f(x, y)\,\alpha\sigma$$

где (L) обозначает область, образованную всеми точками, лежащими внутри замкнутой (и спрямляемой) кривой L, расположенной на плоскости XOY и $f(x, y)$ есть однозначная и непрерывная функция точки (x, y) внутри какой-нибудь односвязной области B этой плоскости, причем предполагаем, что внутри области B расположена эта кривая L, а также кривая L', полученная параллельным смещением кривой L на расстояние Δx параллельно оси OX. Полагая, что $M(\Delta x)$ есть максимум $|f(x + \Delta x, y) - f(x, y)|$ в закрытой области B, содержащей эти кривые L и L', докажем равенство вида:

$$\int_{(L')} f(x, y)\,d\sigma - \int_{(L)} f(x, y)\,d\sigma = \Delta x \oint_L f \cdot dy + \Delta x \cdot (mes \cdot L) \cdot \theta \cdot M(\Delta x); \ldots (4)$$

где $mes \cdot L$ обозначает длину кривой L и $|\theta| < 1$.

* В равенстве (3) x, y, z суть переменные интегрирования; $P = P(x, y, z)$; $Q = Q(x, y, z)$; $R = R(x, y, z)$.

2. Доказательство: рассмотрим прежде всего тот случай, когда кривая L есть граница треугольника (ABC) и потому L' есть граница другого треугольника $(A'B'C')$. При этом имеем, например,

$$\int_{(L')} f d\sigma - \int_{(L)} f d\sigma = \int_{(AA'B'B)} f d\sigma - \int_{(AA'C'C)} f d\sigma - \int_{(CC'B'B)} f d\sigma^*$$

и равенство (4) очевидно. Аналогично доказывается равенство (4) в том случае, когда L есть какая угодно замкнутая ломаная. Нетрудно перейти к случаю всякой замкнутой кривой L (спрямляемой и простой, как мы всегда предполагаем, говоря о замкнутой кривой).

§ 3

1. Переходим теперь к изложению доказательства теоремы I. Рассмотрим предварительно некоторые свойства функций Q и R, предполагая, что эти функции обладают свойством (X). Будем изучать поведение этих функций на плоскости, перпендикулярной оси OX, внутри области D_0, образованной точками этой плоскости, лежащими внутри какой-нибудь замкнутой кривой (простой, как мы всегда предполагаем, и жордановой). Рассмотрим на этой плоскости (и внутри D_0) кривые C_n (и их параллельные смещения) — см. § 1.

Пусть кривая C_n определяется уравнениями вида: $\xi = x_0$; $\eta = y_n + f_n(t)$; $\zeta = z_n + \varphi_n(t)$, где ξ, η, ζ суть координаты текущей точки кривой C_n; t — параметр (переменный); $\xi = x_0$ есть уравнение плоскости, на которой расположена эта кривая C_n; (x_0, y_n, z_n) — какая-нибудь постоянная точка этой кривой C_n.

2. Пусть теперь B есть некоторая односвязная область, находящаяся внутри данной области D_0, причем расстояние границ этих областей положительное. Каждой точке (x_0, y, z) этой области B отнесем кривые $C_n(x_0, y, z)$, определяемые уравнениями вида: $\xi = x_0$; $\eta = y + f_n(t)$; $\zeta = z + \varphi_n(t)$. Эта кривая $C_n(x_0, y, z)$ получена параллельным смещением кривой C_n на плоскости $\xi = x_0$. Очевидно имеем (см. § 1, n^0 2): при $n \to \infty$, $f_n(t) \to 0$, $\varphi_n(t) \to 0$.

Очевидно, что, при достаточно большом n, эти кривые находятся внутри области D_0. Определяем для всех точек множества $\bar{B}$, где $\bar{B}$ есть область B вместе с ее граничными точками, функции вида:

$$Q(x_0, y, z; n) = \frac{1}{\sigma_n} \int_{(C'_n)} Q d\sigma$$

$$R(x_0, y, z; n) = \frac{1}{\sigma_n} \int_{(C'_n)} R d\sigma,$$

* $AA'B'B$ есть параллелограм со сторонами AA', BB', AB и $A'B'$ (аналогично и $AA'C'C$ и $CC'B'B$).

где $C_n = C_n(x_0, y, z)$; $\sigma_n =$ площади $\left(C_n(x_0, y, z)\right) =$ площади (C_n). Иначе говоря, мы относим средние значения функций Q и R на (C_n') точке (x_0, y, z).

Так как диаметр C_n' стремится к нулю, при $n \to \infty$ (см. § 1), то имеем:

$$\lim_{n\to\infty} Q(x_0, y, z; n) = Q; \quad \lim_{n\leftarrow\infty} R(x_0, y, z; n) = R,$$

где мы обозначаем через Q функцию $Q(x_0, y, z)$ и т. п. Этот переход к пределу происходит *равномерно для всех точек множества* $\overline{B}$. Как всегда, $d\sigma$ есть элемент площади области (C_n'),

Очевидно имеем для всяких двух точек $(x_0, y+\Delta y, z)$ и (x_0, y, z) области B равенство вида (сравнить § 2):

$$R(x_0, y+\Delta y, z; n) - R(x_0, y, z; n) = \frac{\Delta y}{\sigma_n} \oint_{C_n'} R dz + \frac{\Delta y}{\sigma_n} \cdot \text{mes } C_n' \cdot \theta \cdot M(\Delta y),$$

где mes $C_n' =$ длине кривой C_n'; $|\theta| < 1$ и $M(\Delta y)$ есть максимум функции $|R(x_0, y+\Delta y, z) - R(x_0, y, z)|$ на множестве $\overline{B}$. при данном $|\Delta y|$.

3. Пользуясь такими равенствами, без труда докажем следующее соотношение:

$$\frac{\partial R(x_0, y, z; n)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x_0, y, z; n)}{\partial z} = \frac{1}{\sigma_u} \oint_{C_n'} Q dy + R dz. \tag{5}$$

4. Для функций Q и R, обладающих свойством (X), правая часть этого равенства (5) обращается в нуль для всех кривых $C_n(x_0, y, z)$ двухмерной области D_0. Следовательно, как известно из классического анализа, для всякой замкнутой (и спрямляемой) кривой C, лежащей внутри B, имеем:

$$\oint_C Q(x_0, y, z; n)\, dy + R(x_0, y, z; n)\, dz = 0. \tag{6}$$

Переходя к пределу, при $n \to \infty$, получим: $J(V, C) = 0$.

5. Из таких равенств вытекает следующая лемма:

Лемма. *Для функций P, Q и R, однозначных и непрерывных внутри области D и обладающих свойствами (X), (Y) и (Z), имеем равенство вида*

$$J(V, C) = 0, \tag{7}$$

где C какая угодно замкнутая кривая, расположенная в плоскости, перпендикулярной какой-нибудь координатной оси, и ограничивающая на этой плоскости такую конечную, двухмерную область (C), которая лежит целиком внутри основной трехмерной односвязной области D. (Пока мы и ограничиваемся рассмотрением таких замкнутых кривых и только позднее — см. § 4 — перейдем к изучению выражений $J(U, C)$ для всевозможных замкнутых кривых, располо-

женных внутри трехмерной односвязной области D, хотя бы не все точки двухмерной области (C), если C — плоская кривая, лежали внутри этой области D. Также рассмотрим позднее замкнутые кривые двоякой кривизны. Все замкнутые кривые предполагаем простыми и спрямляемыми — других замкнутых кривых не рассматриваем.)

Доказательство. Для всякой замкнутой кривой C, расположенной в плоскости, перпендикулярной оси OX, и обладающей тем свойством, что двухмерная область (C) лежит целиком внутри трехмерной области D, мы можем построить такие двухмерные области D_0 и B, о которых говорилось в n° 1 этого §, чтобы C лежала внутри области D_0. Для такой кривой C мы уже доказали равенство (7) в n° 4 этого параграфа. Случаи плоскостей, перпендикулярных другим координатным осям, аналогичны рассмотренному случаю.

6. Рассмотрим теперь функции P, Q и R, обладающие только свойствами (X'), (Y') и (Z'), и докажем лемму, которая получится, если в формулировке только что доказанной леммы заменить свойства (X), (Y) и (Z) этими свойствами (X'), (Y') и (Z'). В этом случае выводим из равенства (5) n° 3, что для всякого данного числа $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число N, что для $n \geqq N$ имеем (для всех точек области B):

$$\left| \frac{\partial R(x_0, y, z; n)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x_0; y, z: n)}{\partial z} \right| < \varepsilon.$$

А поэтому, вместо равенства (6), получаем:

$$\left| \oint_C Q(x_0, y, z; n)\, dy + R(x_0, y, z; n)\, dz \right| < \varepsilon \cdot \sigma(C)$$

где $\sigma(C)$ обозначает площадь (C). При $n \to \infty$, приходим опять к равенству (7) и дальнейшие рассуждения остаются прежними.

§ 4

1. В этом параграфе будет доказана следующая лемма:

Лемма. Если имеем $J(V, C) = 0$ для всякой замкнутой кривой C, расположенной в плоскости, перпендикулярной какой-нибудь координатной оси, и ограничивающей на этой плоскости такую конечную область (C), которая лежит целиком внутри односвязной трехмерной области D, то, в таком случае, имеем

$$J(V, L) = 0$$

для всякой замкнутой кривой L, расположенной внутри области D.

Доказательство. Пусть L какая угодно замкнутая кривая (хотя бы и двоякой кривизны), расположенная внутри области D. (Как всегда, считаем L спрямляемой и простой.)

Сохраняя все обозначения $n°\,2$ § 3, определяем следующую трехмерную область $D(\omega)$:

1°. Область $D(\omega)$ односвязная.

2°. $D(\omega)$ лежит внутри области D, причем для всякой точки (x, y, z) области $D(\omega)$ область $S(x, y, z; \rho)$ объема, равного ω лежит внутри области D (ω достаточно малая).

3°. $D(\omega)$ содержит внутри себя кривую L.

Определяем теперь для всякой точки области $D(\omega)$ функции

$$\overline{P} = P(x, y, z; \omega) = \frac{1}{\omega}\int P(\xi, \eta, \zeta)\, d\omega \tag{8a}$$

$$\overline{Q} = Q(x, y, z; \omega) = \frac{1}{\omega}\int Q(\xi, \eta, \zeta)\, d\omega \tag{8b}$$

$$\overline{R} = R(x, y, z; \omega) = \frac{1}{\omega}\int R(\xi, \eta, \zeta)\, d\omega, \tag{8c}$$

где интегралы распространены на область $S(x, y, z; \rho)$ и ξ, η, ζ — координаты переменной точки этой области (переменные интегрирования!).

2. Докажем прежде всего, что для всякой точки (x, y, z) области $D(\omega)$ имеем:

$$\frac{\partial \overline{R}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{Q}}{\partial z} = \frac{1}{\omega}\int_{x-\rho}^{x+\rho} J(V, \xi)\, d\xi, \tag{9}$$

где

$$J(V, \xi) = \oint Q d\eta + R d\zeta,$$

распространенному на окружность, полученную пересечением поверхности сферы $S(x, y, z; \rho)$ плоскостью $\xi = \text{постоянному}$. Обозначаем такую окружность: $C(x, y, z; \rho; \xi)$; конечную область, ограниченную такой окружностью, обозначим $K(x, y, z; \rho; \xi)$. Доказательство равенства (9) проведем так: возьмем две точки области $D(\omega)$: (x, y, z) и $(x, y + \Delta y, z)$ и полагаем

$$S_1 = S(x, y, z; \rho); \quad S_2 = S(x, y + \Delta y, z; \rho)$$
$$C_1 = C(x, y, z; \rho; \xi);$$
$$K_1 = K(x, y, z; \rho; \xi); \quad K_2 = K(x, y + \Delta y, z; \rho; \xi).$$

Имеем

$$R(x, y + \Delta y, z; \omega) - R(x, y, z; \omega) = \frac{1}{\omega}\left[\int_{S_2} R d\omega - \int_{S_1} R d\omega\right] =$$

$$= \frac{1}{\omega}\int_{x-\rho}^{x+\rho}\left[\iint_{K_2} R(\xi, \eta, \zeta)\, d\eta\, d\zeta - \iint_{K_1} R(\xi, \eta, \zeta)\, d\eta\, d\zeta\right] d\xi.$$

Разность интегралов внутри прямых скобок преобразуем по основной формуле § 3 n° 2 и получаем выражение вида

$$\frac{\Delta y}{\omega}\int_{x-\rho}^{x+\rho}\oint_{C_1} R\,d\zeta\,d\xi + \frac{\Delta y}{\omega}\cdot 4\pi\rho^2\cdot\theta\cdot M(\Delta y),$$

где $|\theta|<1$ и $M(\Delta y)=$ максимуму $|R(x', y'+\Delta y, z') - R(x', y', z')|$, где $(x', y'+\Delta y, z')$ и (x', y', z') суть какие угодно точки некоторой области D_1, расположенной внутри области D и содержащей внутри себя область $D(\omega)$ и все сферы $S(x, y, z; \rho)$.* Пользуясь аналогичными преобразованиями приращений функции $\overline{Q}$, легко докажем равенство (9).

3. Из условий леммы следует, что правая часть равенства (9) равна нулю. Следовательно, находим, что во всякой точке области $D(\omega)$ имеем:

$$\frac{\partial\overline{R}}{\partial y} - \frac{\partial\overline{Q}}{\partial z} = 0. \tag{10}$$

Аналогично получаем:

$$\frac{\partial\overline{P}}{\partial z} - \frac{\partial\overline{R}}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial\overline{Q}}{\partial x} - \frac{\partial\overline{P}}{\partial y} = 0 \tag{11}$$

и поэтому имеем

$$\oint_L \overline{P}dx + \overline{Q}dy + \overline{R}dz = 0,$$

откуда находим (при $\omega\to 0$): $J(V, L)=0$ (ч. т. д.).

Из лемм §§ 3 и 4 и следует теорема I (см. § 1 n° 6).

4. *Замечание к теореме:* пример $P=z$; $Q=0$; $R=0$ ясно показывает, что из свойств (X) и (Z) (например) не следует всегда свойство (Y).

§ 5

1. Переходим к доказательству теоремы II (см. § 1, n° 9). Прежде всего отметим, что в случае функций P, Q и R, обладающих полными дифференциалами в какой-нибудь точке $(\bar{x}, \bar{y}\ \bar{z})$, имеем

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{H(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \rho)}{c\rho^5} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}; \tag{12}$$

где c — абсолютная постоянная (частные производные определены в точке $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$).

* Говоря об области D_1, мы присоединяем к внутренним точкам этой области и точки границы этой области.

Для доказательства равенства (12) замечаем, что в виду существования полных дифференциалов функций P, Q и R в точке $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, мы имеем вблизи этой точки

$$P = P_0 + P_1 \cdot r\sin\theta\cos\varphi + P_2 \cdot r\sin\theta\sin\varphi + P_3 \cdot r\cos\theta + \alpha \cdot r,$$

где $P = P(x, y, z)$, причем (x, y, z) есть какая угодно точка области

$$S = S(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}; \rho),$$

если только ρ достаточно мало;

$$P_0 = P(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}); \quad P_1 = \frac{\partial P}{\partial x} \text{(в центре сферы } S\text{) и т. п.}$$

$$x - \bar{x} = r\sin\theta\cos\varphi; \quad y - \bar{y} = r\sin\theta \cdot \sin\varphi; \quad z - \bar{z} = r\cos\theta, \qquad (13)$$

$|\alpha|$ сколь угодно мало при достаточно малом ρ.

Аналогичные равенства получим и для функций Q и R и формула (12) легко доказывается.

2. Обращаемся теперь к вспомогательным функциям (8a), (8b) и (8c), (§ 4, $n°$ 1). Сохраняем все обозначения § 4. Рассмотрим также выражение $H(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \rho_1)$ и заменим в этом выражении функции P, Q и R вспомогательными функциями (8a), (8b) и (8c). Полученное выражение обозначаем через

$$H(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \rho_1, \omega).$$

Без труда докажем равенство:

$$H(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \rho_1, \omega) = \frac{1}{\omega}\int_S H(x, y, z, \rho_1)\, d\omega, \qquad (14)$$

где $S = S(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}; \rho)$; точка $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ — любая точка области $D(\omega)$; (x, y, z) — текущая точка области S.

Для доказательства равенства (14) обозначаем через $\vec{u}$ радиус вектор точки $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, через $\vec{v}$ — радиус вектор точки $(x - \bar{x}, y - \bar{y}, z - \bar{z})$ и через $\vec{t}$ — радиус вектор точки $(\xi - x, \eta - y, \zeta - z)$, где (ξ, η, ζ) — текущая точка области $S(x, y, z; \rho)$. Обозначаем через $(\vec{u})$ точку с радиусом вектором $\vec{u}$ и т. п. Рассмотрим интеграл:

$$J_1 = \int_{S(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}; \rho_1)} [(y - \bar{y})R(x, y, z; \omega) - (z - \bar{z})Q(x, y, z; \omega)]\, d\omega_1$$

и полагаем:

$$R(x, y, z; \omega) = R(\vec{u} + \vec{v}; \omega); \quad R(\xi, \eta, \zeta) = R(\vec{u} + \vec{v} + \vec{t})$$

$$Q(x, y, z; \omega) = Q(\vec{u} + \vec{v}; \omega); \quad Q(\xi, \eta, \zeta) = Q(\vec{u} + \vec{v} + \vec{t}),$$

Получим

$$\omega J_1 = \int \left(v_2 \cdot \int R\left(\vec{u} + \vec{v} + \vec{t}\right) d\omega - v_3 \cdot \int Q\left(\vec{u} + \vec{v} + \vec{t}\right) d\omega \right) d\omega_1,$$

где v_2 и v_3 суть проекции вектора $\vec{v}$ соответственно на оси OY и OZ. Очевидно имеем

$$\omega J_1 = \int \left[\int \left(v_2 R\left(\vec{u} + \vec{v} + \vec{t}\right) - v_3 Q\left(\vec{u} + \vec{v} + \vec{t}\right) \right) d\omega_1 \right] d\omega,$$

где внутренний интеграл распространен на область $S\left(\vec{u} + \vec{t}\,;\ \rho_1\right)$, а внешний интеграл — на область $S(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z};\ \rho)$, причем точка $\left(\vec{u} + \vec{t}\right)$ находится внутри этой области $S(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z};\ \rho)$.

Аналогичные преобразования и доказывают равенство (14).

3. Замечаем далее, что для функций P, Q и R, обладающих свойством (Δ), имеем

$$\frac{|H(x, y, z;\ \rho_1)|}{\rho_1^{\,5}} < \Psi(x, y, z) \qquad (15)$$

где в правой части имеем функцию, суммируемую в области D, и ρ_1 может быть как угодно малым.

Из (14) и (15) находим для функций P, Q и R, обладающих свойствами, указанными в условии теоремы II (см. § 1, $n°$ 7, 8 и 9):

$$\lim_{\rho_1 \to 0} \frac{H(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \rho_1, \omega)}{\rho_1^{\,5}} = 0; \qquad (16)$$

во всех точках области $D(\omega)$ и при сколь угодно малом ω.

4. Рассуждения $n°$ 1 этого § выводят из равенства (16) равенства вида (10) и (11) $n°$ 3 § 4 и теорема II ($n°$ 9, § 1) доказывается далее так же, как и теорема I в конце $n°$ 3, § 4.

V. FEDOROV. SUR LES INTÉGRALES CURVILIGNES

RÉSUMÉ

Le but de ce travail est d'étudier l'intégrale

1) $$\int_L P dx + Q dy + R dz,$$

où L est une courbe fermeé réctifiable située à l'intèrieur d'un domaine D et les fonctieres $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ sont continues (par rapport à x, y, z ensemble) à l'intérieur de D.

L'auteur cherche les conditions suffisantes pour que l'intégrale (1) s'annule quelle que soit une courbe L fermé et réctifiable.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1934
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ КРУЧЕНИЯ ВАЛОВ ПРИ УЧЕТЕ ЗАТУХАНИЯ

А. П. ФИЛИППОВА

(*Представлено академиком* А. Н. Крыловым)

1. Если учесть внутреннее и внешнее затухания для колебаний кручения цилиндрического стержня (вала), то при обычных предположениях (поперечные сечения при поворачивании одно относительно другого остаются плоскими и радиусы сечений не искривляются), дифференциальное уравнение для колебаний кручения вала может быть записано в виде[1]

$$GI_p \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\gamma}{g} I_p \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \xi_1 \frac{\partial^3 u}{\partial t\, \partial x^2} - \xi_2 \frac{\partial u}{\partial t} = F(x, t), \tag{1}$$

где

GI_p — жесткость вала на кручение,

$\frac{\gamma}{g} I_p$ — момент инерции единицы длины вала (γ — вес единицы объема),

ξ_1 — коэффициент, характеризующий внутреннее затухание вала,

ξ_2 — внешнее,

$u(x, t)$ — угол скручивания в некотором сечении вала,

$F(x, t)$ — интенсивность внешнего скручивающего момента.

2. Будем рассматривать вынужденные колебания кручения вала длиной l в предположении, что на вал насажен ряд дисков, в точках с абсциссами x_1, x_2, ... x_n с моментами инерции относительно оси вала I_1, I_2, ... I_n, помимо того к валу приложены внешние скручивающие моменты, которые для простоты будем предполагать приложенными в тех же точках x_1, x_2, ... x_n.

При наличии подшипников будем предполагать моменты сопротивления их от сил трения $R_1 \frac{\partial u}{\partial t}$, $R_2 \frac{\partial u}{\partial t}$ ... приложенными в точках x_1', x_2', ... x'_{n-1}, причем $x_1 < x_1' < x_2 < x_2' \ldots < x'_{n-1} < x_n$.

[1] H. Holzer. Die Berechnung der Drehschwingungen, 1921. — W. Hort. Technische Schwingungslehre, 1922. — G. Bock. Zeitschr. für Angew. Math. u. Mech., Bd. 12 (1932) S. 261.

Свободные колебания, которые со временем затухают, принимать во внимание не будем.

Чтобы при интегрировании не составлять условий сопряжения в местах расположения дисков и подшипников, переход к сосредоточенным нагрузкам будем производить в согласии с методом акад. А. Н. Крылова («О расчете балок лежащих на упругом основании»).

Массы шкивов будем рассматривать как предельное положение масс, равномерно распределенных в интервалах от x_1 до $x_1 + \sigma_1$, x_2 до $x_2 + \sigma_2 \ldots$ с моментами инерции на ед. длины $i_1, i_2 \ldots$, в предположении, что $i_k \sigma_k \to I_k$, когда $\sigma_k \to 0$. Аналогичное предположение будем вводить по отношению к сопротивлению подшипников, т. е. будем предполагать, что $r_i \sigma_i' \to R_i$, когда $\sigma_i' \to 0$.

Такие же предположения вводим для внешних периодических скручивающих моментов $M_1', M_2', \ldots M_n'$,

$$M_i' = M_i \sin kt + N_i \cos kt,$$

причем $m_i \sigma_i \to M_i$, $n_i \sigma_i \to N_i$, когда $\sigma_i \to 0$.

Постоянные скручивающие моменты во внимание не принимаем, так как они на установившееся колебательное движение вала влияния не оказывают.

Таким образом для $F(x, t)$ имеем значение

$$F(x, t) = i_k \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + m_k \sin kt + n_k \cos kt, \text{ для } x_k \leqq x \leqq x_k + \sigma_k \tag{2}$$

$$F(x, t) = r_k \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{для} \quad x_k' \leqq x \leqq x_k' + \sigma_k', \tag{2'}$$

Где $i_k \sigma_k \to I_k$, $m_k \sigma_k \to M_k$, $n_k \sigma_k \to N_k$, $r_k \sigma_k' \to R_k$, когда $\sigma_k \to 0$ и $\sigma_k' \to 0$.

За исключением указанных интервалов, $F(x, t)$ везде равна нулю. Решение уравнения (1) для вынужденных колебаний ищем в форме

$$u = \varphi(x) \sin kt + \psi(x) \cos kt. \tag{3}$$

Внося значение (3) в уравнение (1), получим для определения φ и ψ систему двух дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &\varphi''(\eta) + \beta^2 \varphi(\eta) - \mu \psi''(\eta) + \mu_1 \psi(\eta) = F_1(\eta), \\ &\psi''(\eta) + \beta^2 \psi(\eta) + \mu \varphi''(\eta) - \mu_1 \varphi(\eta) = F_2(\eta), \end{aligned} \tag{4}$$

где обозначено

$$\eta = \frac{x}{l}, \quad \mu = \frac{\xi_1 k}{G I_p}, \quad \mu_1 = \frac{\xi_2 k l^2}{G I_n}, \quad \beta^2 = \frac{k^2 l^2}{a^2}, \quad a^2 = \frac{gG}{\gamma}.$$

причем, согласно (2) и (2′) $F_1(\eta)$, $F_2(\eta)$ будут везде равны нулю, за исключением интервалов $\eta_i \leqq \eta \leqq \eta_i + \varepsilon_i$ и $\eta_i' \leqq \eta \leqq \eta_i' + \varepsilon_i'$ $\left(\varepsilon_i = \frac{\delta_k}{}\right)$, где $F_1(\eta)$ и $F_2(\eta)$ имеют значения

$$(5) \qquad F_1(\eta) = -\frac{g\beta^2 i_k}{\gamma I_p}\varphi(\eta) + \frac{m_k l^2}{GI_p}, \quad F_2(\eta) = -\frac{g\beta^2 i_k}{\gamma I_p}\psi(\eta) + \frac{n_k l^2}{GI_p}$$

$$\text{для } \eta_k \leqq \eta \leqq \eta_k + \varepsilon_k,$$

$$(5') \quad F_1(\eta) = -\frac{a\beta l r_k}{G_1 I_p}\psi(\eta), \quad F_2(\eta) = \frac{a\beta l r_k}{G_1 I_p}\varphi(\eta) \quad \text{для} \quad \eta_k' \leqq \eta' \leqq \eta_k + \varepsilon_k'.$$

Значения функций $\varphi((\eta)$ и $\psi(\eta)$ определяем, пользуясь символическим методом Heaviside'a, в предположении, что

$$\varphi(0) = A_1, \quad \varphi'(0) = B_1, \quad \psi(0) = C_1, \quad \psi'(0) = D_1,$$

причем, согласно основной идее этого метода,

$$\varphi(\eta) = \int_0^\eta \frac{d\varphi}{d\eta}d\eta + A_1 = \frac{1}{p}\frac{d\varphi}{d\eta} + A_1, \quad \frac{d\varphi}{d\eta} = \int_0^\eta \frac{d^2\varphi}{d\eta^2}d\eta + B_1 = \frac{1}{p}\frac{d^2\varphi}{d\eta^2} + B_1.$$

Следовательно, имеем выражения для производных от φ, а также и для ψ в виде

$$\frac{d\varphi}{d\eta} = p\varphi - pA_1, \quad \frac{d^2\varphi}{d\eta^2} = p^2\varphi - p^2A_1 - pB_1;$$

$$\frac{d\psi}{d\eta} = p\psi - pC_1, \quad \frac{d^2\psi}{d\eta^2} = p^2\psi - p^2C_1 - pD_1.$$

Система уравнений (4) запишется в форме

$$(4') \quad \begin{aligned} p^2\varphi + \beta^2\varphi - \mu p^2\psi + \mu_1\psi &= F_1(\eta) + p^2A_1 + pB_1 - \mu(p^2C_1 + pD_1), \\ p^2\psi + \beta^2\psi + \mu p^2\varphi - \mu_1\varphi &= F_2(\eta) + p^2C_1 + pD_1 + \mu(p^2A_1 + pB_1), \end{aligned}$$

откуда, исключая ψ и пользуясь правилами разложения рациональных дробей на простейшие, получим:

$$\varphi = A_1 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{4} \frac{[F_1(\eta) + f_1(s_i)](\beta^2 + s_i^2) + [F_2(\eta) + f_2(s_i)](\mu s_i^2 - \mu_1) - (\mu\beta^2 + \mu_1)s_i^2 C_1}{(p - s_i)H'(s_i)},$$

где

$$f_1(s_i) = B_i s_i - \mu s_i D_1 - \beta^2 A_1, \quad f_2(s_i) = s_i D_1 + \mu s_i B_1 + \mu_1 A_1,$$

а $s_i (i = 1,4)$ корни характеристического уравнения

$$H(s) = (s^2 + \beta^2)^2 + (\mu s^2 - \mu_1)^2 = 0$$

равные

$$s_1 = \alpha_1 + i\alpha, \quad s_2 = -(\alpha_1 + i\alpha), \quad s_3 = -(\alpha_1 - \alpha i), \quad s_4 = \alpha_1 - i\alpha, \tag{6}$$

где

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{1}{2(1+\mu^2)}\left\{\sqrt{(\beta^4+\mu_1^2)(1+\mu^2)} - (\beta^2 - \mu\mu_1)\right\}},$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2(1+\mu^2)}\left\{\sqrt{(\beta^4+\mu_1^2)(1+\mu^2)} + \beta^2 - \mu\mu_1\right\}}.$$

Интерпретируя символические выражения $(p-s)^{-1}f$ как соответствующие дифференциальные уравнения, получим для $\varphi(\eta)$, а также и $\psi(\eta)$, решение в виде

$$\begin{aligned} \varphi(\eta) &= \varphi_1(\eta) + \Phi(\eta), \\ \psi(\eta) &= \psi_1(\eta) + \Psi(\eta), \end{aligned} \tag{7}$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_1(\eta) &= A ch\alpha_1\eta\cos\alpha\eta - B sh\alpha_1\eta\sin\alpha\eta - C sh\alpha_1\eta\cos\alpha\eta + D ch\alpha_1\eta\sin\alpha\eta, \\ \psi_1(\eta) &= B ch\alpha_1\eta\cos\alpha\eta + A sh\alpha_1\eta\sin\alpha\eta - D sh\alpha_1\eta\cos\alpha\eta - C ch\alpha_1\eta\sin\alpha\eta, \end{aligned} \tag{7'}$$

причем произвольные постоянные A_1, B_1, C_1, D_1, заменены после интегрирования на A, B, C и D, связанные с прежними линейными зависимостями.

В равенстве (7) через Φ и Ψ обозначены частные решения уравнений (4) с правой частью.

В случае, если имеем только один диск, насаженный в точке $\eta = \eta_1$, то для

$$0 \leqq \eta \leqq \eta_1, \quad \Phi(\eta) = 0 \quad \text{и} \quad \Psi(\eta) = 0, \quad \text{а для} \quad \eta > \eta_1 + \varepsilon_1$$

$$\Phi(\eta) = \int_{\eta_1}^{\eta_1+\varepsilon_1} \frac{F_1(\eta) + iF_2(\eta)}{4(1+\mu i)}\left[\frac{1}{s_1}e^{s_1(\eta-t)} + \frac{1}{s_2}e^{s_2(\eta-t)}\right]dt +$$

$$+ \int_{\eta_1}^{\eta_1+\varepsilon_1} \frac{F_1(\eta) - iF_2(\eta)}{4(1-\mu i)}\left[\frac{1}{s_3}e^{s_3(\eta-t)} + \frac{1}{s_4}e^{s_4(\eta-t)}\right]dt;$$

$$\Psi(\eta) = \int_{\eta_1}^{\eta_1+\varepsilon_1} \frac{F_2(\eta) - iF_1(\eta)}{4(1+\mu i)}\left[\frac{1}{s_1}e^{s_1(\eta-t)} + \frac{1}{s_2}e^{s_2(\eta-t)}\right]dt +$$

$$+ \int_{\eta_1}^{\eta_1+\varepsilon_1} \frac{F_2(\eta) + iF_1(\eta)}{4(1-\mu i)}\left[\frac{1}{s_3}e^{s_3(\eta-t)} + \frac{1}{s_4}e^{s_4(\eta-t)}\right]dt.$$

Подставляя вместо $F_1(\eta)$ и $F_2(\eta)$ их значения согласно (5)

$$F_1(\eta) = -\frac{g\beta^2 i_1}{\gamma I_p}[\varphi_1(\eta) + \Phi(\eta)] + \frac{m_1 l^2}{GI_p},$$

$$F_2(\eta) = -\frac{g\beta^2 i_1}{\gamma I_p}[\psi_1(\eta) + \Psi(\eta)] + \frac{n_1 l^2}{GI_p}$$

и принимая во внимание, что при переходе к пределу, в предположении что $i\,\varepsilon_1 l \to I_1 \quad m_1 \varepsilon\, l \to M_1, \quad n_1 \varepsilon_1 l \to N_1,$ когда $\varepsilon_1 \to 0$, интегралы, содержащие $\Phi(\eta)$ и $\Psi(\eta)$, пропадут, получим частное решение системы

$$(8) \qquad \Phi(\eta) = 0 \quad \text{для} \quad 0 \leqq \eta \leqq \eta_1$$

$$\Phi(\eta - \eta_1) = \gamma_1 sh\alpha_1(\eta - \eta_1)\cos\alpha(\eta - \eta_1) - \delta_1 ch\alpha_1(\eta - \eta_1)\sin\alpha(\eta - \eta_1)$$

$$\text{для} \quad \eta_1 \leqq \eta \leqq 1.$$

$$(8') \qquad \Psi(\eta) = 0 \quad \text{для} \quad 0 \leqq \eta \leqq \eta_1,$$

$$\Psi(\eta - \eta_1) = \delta_1 sh\alpha_1(\eta - \eta_1)\cos\alpha(\eta - \eta_1) + \gamma_1 ch\alpha_1(\eta - \eta_1)\sin\alpha(\eta - \eta_1)$$

$$\text{для} \quad \eta_1 \leqq \eta \leqq 1,$$

где

$$\gamma_1 = n_1[\varphi_1(\eta_1)\nu_1 - \psi_1(\eta_1)\nu] - \frac{l}{GI_p\beta^2}[M_1\nu_1 - N_1\nu],$$

$$\delta_1 = n_1[\varphi_1(\eta_1)\nu + \psi_1(\eta_1)\nu_1] - \frac{l}{GI_p\beta^2}[M_1\nu + N_1\nu_1],$$

причем

$$n_1 = \frac{gI_1}{\gamma l I_p}, \quad \nu_1 = \frac{1}{K}\left(\alpha_1 - \frac{\alpha\mu_1}{\beta^2}\right), \quad \nu = \frac{1}{K}\left(\alpha + \frac{\mu_1\alpha_1}{\beta^2}\right), \quad K = 1 + \frac{\mu_1^2}{\beta^4}.$$

При наличии только внешнего сопротивления $(2')$, приложенного в точке x_1', частное решение $\Phi(\eta)$ и $\Psi(\eta)$ равно нулю для $0 \leqq \eta \leqq \eta_1'$, а для $\eta_1' \leqq \eta \leqq 1$

$$(9) \qquad \begin{aligned} \Phi_{11}(\eta - \eta_1') &= \gamma_1' sh\alpha_1(\eta - \eta_1)\cos\alpha(\eta - \eta_1) - \delta_1' ch\alpha_1(\eta - \eta_1)\sin\alpha(\eta - \eta_1) \\ \Psi_{11}(\eta - \eta_1') &= \delta_1' sh\alpha_1(\eta - \eta_1)\cos\alpha(\eta - \eta_1) + \gamma_1' ch\alpha_1(\eta - \eta_1)\sin\alpha(\eta - \eta_1), \end{aligned}$$

где

$$\gamma_1' = \frac{aR}{GI_p\beta}[\psi_1(\eta_1')\nu_1 + \varphi_1(\eta_1')\nu], \quad \delta_1' = \frac{aR}{GI_p\beta}[\psi_1(\eta_1')\nu - \varphi_1(\eta_1')\nu_1]$$

В том случае, когда имеется несколько дисков в точках $\eta_1, \eta_2 \ldots \eta_n$, а также внешнее сосредоточенное затухание $(2')$ в точках $\eta_1', \eta_2' \ldots \eta_{n-1}'$ $(\eta_1 < \eta_1' < \eta_2 < \eta_2' < \eta_3 \ldots)$ общее решение уравнения системы (4) для интервала $\eta_i \leqq \eta \leqq \eta_i'$

$$(10) \qquad \begin{aligned} \varphi(\eta) &= \varphi_1(\eta) + \sum_{k=1}^{i} \Phi_k(\eta - \eta_k) + \sum_{k=1}^{i-1} \Phi_{1k}(\eta - \eta_k'), \\ \psi(\eta) &= \psi_1(\eta) + \sum_{k=1}^{i} \Psi_k(\eta - \eta_k +) \sum_{k=1}^{i-1} \Psi_{1k}(\eta - \eta_k'), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} &\Phi_k(\eta - \eta_k) = \gamma_k sh\alpha_1(\eta - \eta_k)\cos\alpha(\eta - \eta_k) - \delta_k ch\alpha_1(\eta - \eta_k)\sin\alpha(\eta - \eta_k); \\ &\Psi_k(\eta - \eta_k) = \delta_k sh\alpha_1(\eta - \eta_k)\cos\alpha(\eta - \eta_k) + \gamma_k ch\alpha_1(\eta - \eta_k)\sin\alpha(\eta - \eta_k); \\ (11) \quad &\Phi_{1k}(\eta - \eta_k') = \gamma_k' sh\alpha_1(\eta - \eta_k')\cos\alpha(\eta - \eta_k') - \delta_k' ch\alpha_1(\eta - \eta_k')\sin\alpha(\eta - \eta_k'); \\ &\Psi_{1k}(\eta - \eta_k') = \delta_k' sh\alpha_1(\eta - \eta_k')\cos\alpha(\eta - \eta_k') + \gamma_k' ch\alpha_1(\eta - \eta_k')\sin\alpha(\eta - \eta_k'). \end{aligned}$$

причем

$$\gamma_k = n_k[\varphi(\eta_k)\nu_1 - \psi(\eta_k)\nu] - \frac{l}{GI_p\beta^2}[M_k\nu - N_k\nu],$$

$$\delta_k = n_k[\varphi(\eta_k)\nu + \psi(\eta_k)\nu_1] - \frac{l}{GI_p\beta^2}[M_1\nu + N_1\nu_1];$$

$$\gamma_k' = \frac{aR_k}{GI_p\beta}[\psi(\eta_k')\nu + \varphi(\eta_k')\nu_1], \quad \delta_k' = \frac{aR_k}{GI_p\beta}[\psi(\eta_k')\nu - \varphi(\eta_k')\nu_1],$$

где

$$n_{k'} = \frac{gI_k}{\gamma' I_p}$$

При наличии только внутреннего затухания в предыдущих формулах необходимо положить $\nu_1 = \alpha_1$, $\nu = \alpha$.

3. Если на концах вала также насажены диски с моментами инерции I_0, I, то необходимо удовлетворить условиям

$$I_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(GI_p\frac{\partial u}{\partial x} + \xi_1\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}\right) = 0 \quad \text{для} \quad x = 0,$$
$$I\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \left(GI_p\frac{\partial u}{\partial x} + \xi_1\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}\right) = 0 \quad \text{для} \quad x = l; \tag{12}$$

или

$$\beta^2 n_0\varphi + \varphi' - \mu\psi' = 0, \quad \beta^2 n_0\psi + \psi' + \mu\varphi' = 0, \quad \text{для} \quad \eta = 0,$$
$$\beta^2 n\,\varphi - (\varphi' - \mu\psi') = 0, \quad \beta^2 n\,\psi - (\psi' + \varphi') = 0, \quad \text{для} \quad \eta = 1 \tag{12'}$$

Удовлетворяя условия (12), получим систему уравнений относительно A, B, C и D, откуда и найдем их значения.

При наличии нескольких дисков и местных внешних затуханий (2'), при удовлетворении условий для правого конца, писать общее решение для последнего участка $\eta_n' \leqq \eta \leqq 1$ нет, конечно, надобности, а в каждом отдельном случае следует заранее поставить численное выражение величин, входящих в Φ_i, Ψ_i, ψ_{1i}, φ_{1i}.

В частности, при наличии только трех дисков в точках $\eta = 0$, $\eta = \eta_1$, $\eta = 1$ и скручивающего момента $M \sin kt$, приложенного к среднему диску, при отсутствии внешнего затухания, можно получить следующие уравнения для определения C и D

$$c_1 C + c_2 D = d_1$$
$$-c_2 C + c_1 D = d_2, \tag{13}$$

где

$$c_1 = a_1 ch\alpha_1 \cos\alpha + a_2 sh\alpha_1 \sin\alpha + a_3 sh\alpha\cos\alpha + a_4 ch\alpha_1 \sin\alpha +$$
$$+ a_5 ch\alpha_1\eta_2\cos\alpha\eta_2 + a_6 sh\alpha_1\eta_2\sin\alpha\eta_2 + a_7 sh\alpha_1\eta_2\cos\alpha\eta_2$$
$$c_2 = a_2 ch\alpha_1\cos\alpha - a_1 sh\alpha_1\sin\alpha + a_4 sh\alpha_1\cos\alpha - a_3 ch\alpha_1\sin\alpha +$$
$$+ a_6 ch\alpha_1\eta_2\cos\alpha\eta_2 - a_5 sh\alpha_1\eta_2\sin\alpha\eta_2 - a_7 ch\alpha_1\eta_2\sin\alpha\eta_2$$

$$d_1 = -\frac{lM}{GI_p} ch\alpha_1(1-\eta_1)\cos\alpha(1-\eta_1) - \frac{n_2 lM}{G_1 I_p}[\alpha_1 sh\alpha_1(1-\eta_1)\cos\alpha(1-\eta_1) -$$
$$-\alpha ch\alpha_1(1-\eta_1)\sin\alpha(1-\eta_1)]$$

$$d_2 = -\frac{lM}{GI_p} sh\alpha_1(1-\eta_1)\sin\alpha(1-\eta_1) - \frac{n_2 lM}{GI_p}[\alpha sh\alpha_1(1-\eta_1)\cos\alpha(1-\eta_1) +$$
$$+\alpha_1 ch\alpha_1(1-\eta_1)\sin\alpha(1-\eta_1)]$$

причем

$$\eta_2 = 2\eta_1 - 1, \quad a_1 = (\mu\alpha - \alpha_1)\left(1 + \frac{n_1}{2n_0} + \frac{n_2}{n_0}\right) + \frac{\alpha_1 n_1 n_2 \beta^2}{2},$$

$$a_2 = (\alpha + \mu\alpha_1)\left(1 + \frac{n_1}{2n_0} + \frac{n_2}{n_0}\right) - \frac{\alpha n_1 n_2 \beta^2}{2}$$

$$a_3 = \beta^2\left(\frac{n_1}{2} + n_2 + \frac{n_1 n_2}{2n_0}\right) - \frac{1}{n_0}, \quad a_4 = \frac{\mu}{n_0}, \quad a_5 = \frac{n_1}{2n_0}(\alpha\mu - \alpha_1) - \frac{\beta^2 n_1 n_2 \alpha_1}{2},$$

$$a_6 = (\alpha + \mu\alpha_1)\frac{n_1}{2n_0} + \frac{\alpha n_1 n_2 \beta^2}{2}, \qquad a_7 = \frac{n_1}{2}\left(1 - \frac{n_2}{n_0}\right)\beta^2$$

значения A и B будут

$$\beta^2 n_0 A = (\alpha_1 - \mu\alpha)C - (\alpha + \mu\alpha_1)D \tag{13'}$$
$$\beta^2 n_0 B = (\alpha + \mu\alpha_1)C + (\alpha_1 - \mu\alpha)D$$

Значения φ и ψ определятся согласно (7).

4. В том случае, когда внешнее и внутреннее затухания отсутствуют, для вала, несущего ряд дисков $I_1, I_2 \ldots I_n$ в точках $x_1, x_2 \ldots x_n$, к которым приложены в тех же точках внешние моменты $M_i \sin(pt + \delta)$, решение уравнения (1) в интервале $\eta_i \leqq \eta \leqq \eta_{i+1}$ будет

$$u = \varphi(\eta)\sin(kt + \delta) =$$
$$= \left[A_1 \cos\beta\eta + B_1 \sin\beta\eta + \sum_{k=1}^{i} \Phi_k(\eta - \eta_k)\right]\sin(pt + \delta), \tag{14}$$

причем

$$\varphi(\eta) = A_1\cos\beta\eta + B_1\sin\beta\eta \quad \text{для} \quad 0 \leqq \eta \leqq \eta_1;$$
$$\Phi_k(\eta - \eta_k) = \left[\frac{M_k l}{GI_p\beta} - \beta n_k \varphi(\eta_k)\right]\sin\beta(\eta - \eta_k)$$

Если положить $M_k = 0$ и удовлетворить $\varphi(\eta)$ условиям для $\eta = 0$ и $\eta = 1$, то придем к уравнению частоты для свободных колебаний вала. Например, для случая трех дисков, расположенных в точках $\eta = 0$, $\eta = \eta_1$, $\eta = 1$ с моментами инерции I_0, I_1, I уравнение частоты

$$(n_0 + n)\beta\cos\beta - (\beta^2 n_0 n - 1)\sin\beta -$$
$$-\beta n_1(\cos\beta\eta_1 - n_0\beta\sin\beta\eta_1)[\beta n\sin\beta(1-\eta_1) - \cos\beta(1-\eta_1)] = 0 \tag{15}$$

из которого и определятся значения корней $\beta: \beta_1, \beta_2 \ldots$

A. FILIPPOV (A. Philippoff). ERZWUNGENE DREHSCHWINGUNGEN VON WELLEN MIT DÄMPFUNG

ZUSAMMENFASSUNG

In dieser Arbeit werden erzwungene Drehschwingungen von homogenen Wellen betrachtet, mit äusserer und innerer Dämpfung, ausgehend aus der Differentialgleichung (1).

Im Falle, wenn die Welle mit einer Reihe von Scheiben mit Trägheitsmomenten I_1, $I_2 \ldots I_n$ und einzelnen äusseren Widerstandsmomenten (vom Lager) $R_1 \frac{\partial u}{\partial t}$, $R_2 \frac{\partial u}{\partial t} \cdots$ verbunden ist, kann die Lösung bei äusseren periodischen Drehungsmomenten mit Hilfe der Heaviside'schen Methode erlangt werden mit Benutzung der Methode von A. Kryloff bei dem Übergang zu Einzelmomenten.

Die Lösung der Gleichung (1) im Intervalle zwischen den Scheiben $i-1$ und i sehen wir in (10), wo φ, ψ, Φ und Ψ laut (7), (11) bestimmt werden.

Wenn wir an den Enden der Welle Scheiben haben, so werden die Konstanten A B C und D aus (12) bestimmt.

Diese Lösung benutzend, geben wir in § 3 die Werte der Konstanten für den Fall einer Welle (mit innerer Dämpfung) bei drei Scheiben und einem äusseren, die mittlere Scheibe angreifenden Moment.

In § 4 wird die allgemeine Lösung gezeigt für den Fall, wenn innere und äussere Dämpfungen nicht vorhanden sind.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1934
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

КАЧЕСТВЕННОЕ И КОЛИЧЕСТВЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛИТИЯ, РУБИДИЯ И ЦЕЗИЯ СПЕКТРАЛЬНЫМ ПУТЕМ

Ю. М. ТОЛМАЧЕВ

(*Представлено академиком* Д. С. Рождественским)

Настоящая работа имела своей целью усовершенствование спектрального метода качественного и количественного определения Rb и Cs в минералах. Так как при определении рубидия и цезия оказалось возможным, не вводя дополнительных операций, определять и литий, то и этот элемент вошел в круг наших исследований. Li, Rb и Cs начинают находить себе усиленное применение в самых разнообразных отраслях промышленности. Так, например, Li в виде его минералов или солей применяется в медицине, для приготовления искусственной минеральной воды, в гистологии, аналитической химии, в стекольной промышленности (опаловые и белые стекла, флинтглас), в производстве эмалей и глазури, пиротехнике, фотографии, в щелочных аккумуляторах Эдиссона и т. д. Особенно важное применение литий получил в виде сплавов с другими металлами (склерон, баббиты). В связи с этим обстоятельством мировая добыча лития значительно возросла в последнее время.

Рубидий и цезий, использовывавшиеся до недавнего времени в виде своих солей только в медицине, в настоящее время нашли себе важное применение в электровакуумной промышленности. Ввиду большой электронной эмиссии цезия, последний с успехом стал применяться для изготовления фотоэлементов.

Литий не так редок по распространению в земной коре, но он находится в весьма рассеянном состоянии. Большие концентрации его наблюдаются, главным образом, в силикатных породах. Из собственно литиевых минералов можно отметить трифилины, амблигониты с содержанием до 8% Li_2O, лепидолиты, сподумены с содержанием от 1 до 6%, петалит, цинвальдит и некоторые другие.

В меньших количествах, порядка нескольких десятых процента, литий встречается в некоторых разностях лепидолитов, мусковитах, эпидотах, олигоклазах, ортоклазах, флогопитах, анортитах, микроклинах, бериллах и т. д. В очень малых количествах он обнаружен в кварце, гранитах, доломитах, криолитах, каменной

соли, метеоритах, минеральных водах, в золе многих растений (например, табака), в жирах, молоке и т. д.

Рубидий и цезий представляют еще более редкие элементы, чем литий, и степень рассеянности их еще больше. Из собственно рубидиевых минералов можно назвать родицит, но этот минерал чрезвычайно редок. В некоторых разностях лепидолитов Rb находят от 1 до 3%. Кроме того, он найден в некоторых лейцитах (до 0.9%), карналитах, габбро, петалитах, ортоклазах, базальтах, в соляных, горячих, железистых и борнокислых источниках. В ничтожных количествах Rb находится в некоторых сортах кофе, табака, в винном камне, поташе и т. д.

Из собственно цезиевых минералов можно назвать поллукс и воробьевит (цезиевый берилл); Cs иногда присутствует в некоторых минералах, содержащих Li и Rb (см. выше).

Качественное и количественное определение Li, Rb и Cs в минералах химическим путем, даже после выделения их (вместе с Na и K), сопряжено со значительными аналитическими трудностями и отнимает много времени, а при малых количествах без предварительного обогащения даже невозможно. Поэтому уже издавна на помощь химическим методам анализа разными исследователями стали привлекаться методы спектрального анализа. Последний, как известно, для многих элементов с большим успехом оправдал это применение и в настоящее время становится сильным и надежным орудием в руках аналитика.

Качественное определение Li, Rb и Cs спектральным путем производилось многими исследователями, из которых нужно отметить Gramont (1—3), Вернадского (4—9), Hartley (10), Lacroix (11), Bossuett (12—13), Wild (14), Klemm (14), Brun (15), Ramage (16) и др. (17—21).

Эти авторы исследовали целый ряд минералов различных месторождений: микроклины, бериллы, мусковиты, полевые шпаты, карналиты и др. Минералы исследовались в одних случаях непосредственно, в других — из них извлекались щелочи. Спектральное изучение последних приводило к более надежным результатам.

В качестве источника света эти авторы пользовались или пламенем (кислородно-водородное или ацетиленовое), дугой, или искрой, а иногда и комбинировали их. Все определения производились большей частью для лития по линиям 4602.4, 6103.6 и 6707.8 (все длины волн сейчас и в последующем изложении выражены в интернациональных ангстремах), для рубидия — по линиям 4215.6 и 4201.8, для Cs — по линиям 4593.2 и 4555.3.

Определения велись или визуально, или фотографически.

По причинам, о которых будет говориться ниже, пользование некоторыми из указанных линий для открытия в исследуемых веществах Li, Rb и Cs представляется в некоторых случаях не совсем удобным.

В отношении количественного спектрального анализа Li, Rb и Cs сделано совсем мало. Сюда нужно отнести работы Gooch'a и Phinney (22), которые дали визуальный метод количественного определения Rb. Наблюдения велись по синей линии Rb путем сравнения со стандартными растворами. Чувствительность по данным авторов равна 0.002% Rb в растворе. По этому методу Robinson (23) проделал приближенные определения Rb и Cs в некоторых растениях.

Затем Hukuda (24) производил определения Li по линиям 6707.8 и 6103.6, применяя метод сравнения со стандартными растворами с понижающейся (в 2 раза) концентрацией. По линии 6707.8 он определял Li до 0.0001%, по линии 6103.6 — до 0.0003%.

Далее Fresenius (25) подверг спектроскопическому изучению ряд минеральных вод на содержание Rb и Cs. Применялся тот же метод сравнения со стандартными растворами, причем последние брались в более узких пределах концентраций (например, 0.04, 0.06, 0.08, 0.1 и т. д.). Определения велись в искре по линиям 4201.8 и 4555.3 с концентрациями не ниже 0.02%. Результаты исследований хорошо согласовывались с данными химического анализа.

Goldschmidt (26) и его сотрудники произвели серию анализов над средними пробами из немецких габбро, гранитов, нефелиновых сиенитов, шифферных глин, девонских и юрских известняков, а также морской воды и морской соли. Минералы исследовались как непосредственно, так и путем извлечения из них щелочей в виде сульфатов (совместно со щелочно-земельными металлами). Для первых приготавливались для сравнения твердые смеси из SiO_2, Al_2O_3, Fe_2O_3 и K_2SO_4 с понижающимся процентным содержанием Li, Rb и Cs, для вторых — смеси определенных количеств сульфатов Li, Rb и Cs с чистым K_2SO_4 (добавлялись CaO и MgO). Все определения были проведены в дуге по вторым дублетам главных серий Li, Rb и Cs с длинами волн соответственно 3232.6, 4201.8 и 4555.3. По данным авторов, Li можно обнаружить (и количественно определить) при концентрации до 0.0002%, Rb — 0.006% и Cs — 0.007%.

Из перечисленных работ лучшими в смысле точности определений нужно считать работы Hukuda и Fresenius'a.

Экспериментальная часть

В данной работе для качественного и количественного определения Li, Rb и Cs употреблялись:

1) Большой кварцевый спектрограф фирмы Schmidt и Haensch со светосилой 1 : 10 и длиной спектра в 24 см от 7000 Å до 2100 Å.

2) Однопризменный спектрограф Zeiss'a со светосилой 1 : 12.5 и длиной спектра в 5.2 см от 8943 Å до 3883 Å.

3) Спектрограф с плоской отражательной дифракционной решеткой Hilger'a размером 84 мм × 51 мм, с 5684 линиями на 1 см. Дисперсия во 2-м порядке в области от 4200 Å до 4606 Å равна 5.48 Å на 1 мм.

Источником света служила или дуга постоянного тока или искра. Последняя получалась от трансформатора, дающего напряжение в 12 000 вольт. В колебательный контур параллельно включалась емкость в 0.01 микрофарады, последовательно же — эмпирически подобранная самоиндукция. Искровой промежуток обычно брался в 4 мм.

В качестве электродов служили бесфитильные угли Siemens — A — Kohle. Для работы в искре в нижнем угле делалось сферическое углубление в 2 мм; верхний уголь обтачивался на конус. Для работы в дуге в нижнем угле высверливался канал диаметром в 2 мм, который и заполнялся испытуемым материалом. В этих углях в качестве главных примесей находились Ca, Al, Mg, Si, Fe, B и Na. В очень незначительных количествах присутствовали Ga, Mn, Cu, Sr, Ba и некоторые другие элементы. Li находился в виде ничтожных следов, Rb и Cs — отсутствовали.

Свет от искры собирался на щель спектрографа кварцевой цилиндрической линзой, а свет от дуги — или кварцевой, или стеклянной (в зависимости от области снимаемого спектра) сферической линзой.

Для съемок употреблялись пластинки Ilford'a «Special Rapid». Проявление производилось штриховым метол-гидрохиноновым проявителем.

Таблица 1

№№ по порядку	Название	Формула	Район
1	Мусковит I	$KH_2Al_3Si_3O_{12}$	Липовский, Урал
2	Мусковит II	То же	Карелия
3	Мусковит III	То же	Карелия
4	Флогопит	$K_2FMg_3AlSi_3O_{12}$	Слюдянка, Забайкалье
5	Лепидолит I	$KH_2LiAl_2Si_3O_{11}$	Липовский, Урал
6	Лепидолит II	То же	» »
7	Микроклин	$K(Na)AlSi_3O_8$	» »
8	Ортоклаз	$KAlSi_3O_8$	Мурзинка, Урал
9	Берилл	$Be_3Al_2Si_6O_{18}$	Липовский, Урал
10	Воробьевит	То же	» »
11	Петалит	$LiAlSi_4O_{10}$	» »
12	Ортит	$Ca_2HAl_3Si_3O_{13}$	Слюдянка, Забайкалье

В качестве объектов исследования были взяты 12 минералов (см. табл. 1), любезно предоставленных заведующим Минералогическим музеем Академии Наук СССР В. И. Крыжановским.

Состав минералов выписан из рабочей книги по минералогии А. К. Болдырева.

Качественное определение Li, Rb и Cs

Для качественных определений были сняты искровые и дуговые спектры минералов на большом кварцевом спектрографе. Вся работа вначале ориентировалась на интенсивные составляющие вторых дублетов главных серий Li, Rb и Cs. В табл. 2 приведены их длины волн:

Таблица 2

Элемент	Сериальный символ	Длина волны в Å
Li	$2^2 S_{1/2} - 3^2 P_{1/2, 3/2}$	3232.6
Rb	$5^2 S_{1/2} - 6^2 P_{3/2}$	4201.8
Cs	$6^2 S_{1/2} - 7^2 P_{3/2}$	4555.3

Кроме перечисленных в таблице линий при исследовании принимались во внимание и другие линии этих элементов: для Li — линии 4602.0 и 4603.2 и для Cs — 4593.2.

При рассмотрении полученных спектров принимались во внимание следующие неблагоприятные обстоятельства:

1) Линия Li 4603.2 совпадает с линией Cs 4603.8. Линия Li 4602.0 комбинационная, а 4603.2 принадлежит к побочной серии, и поэтому они мало интенсивны. Кроме того, они попадают в CN — полосу с головой 4606.3, что весьма неблагоприятно, вследствие фона, создаваемого этой полосой. Линия Li 3232.6 является в этом отношении более удобной.

2) Линия Rb 4215.6 совпадает с головой 4216.1 CN — полосы; линия 4201.8 совпадает с линией Fe 4202.0, и поэтому определение по ней Rb можно производить только тогда, когда железа в данном образце очень мало, а рубидия много.

3) Линия Cs 4555.3 попадает в CN — полосу с головой 4578.2 и близка к CN — полосе с головой 4553.3 Å, а также находится в близком соседстве с линией Ba 4554.0, которая является последней линией Ba, а, следовательно, и очень интенсивной. Барий же присутствует в углях, а кроме того он обнаружен в большинстве исследуемых минералов. Линия Cs 4593.2 менее чувствительна, чем линия 4555.3.

Все эти обстоятельства при малых количествах Li, Rb и Cs не позволяют решить вопрос об их присутствии или отсутствии.

Условия опыта для искры: щель — 0.015 мм, сила тока 3.5 амп., экспозиция 4.5′. Так как искра в течение первых 30—40″ разбрасывала из угля

порошок минерала, то последний вводился через каждую минуту и смачивался каплей концентрированной HCl.

Условия опыта для дуги: щель 0.015 мм, сила тока 7.0 амп., экспозиция 40″. Канал нижнего угля глубиной в 1.5 см плотно заполнялся растертым минералом. На щель спектрографа фокусировалось только пламя дуги во избежание получения сплошного фона от раскаленных концов углей.

Результаты анализа полученных спектров приведены в табл. 3.

Таблица 3

№№ по порядку	Название	Li	Rb	Cs
1	Мусковит I	+	—	—
2	Мусковит II	—	—	—
3	Мусковит III	—	—	—
4	Флогопит	+	—	—
5	Лепидолит I	+	+	—
6	Лепидолит II	+	+	—
7	Микроклин	+	+	
8	Ортоклаз	—	+	—
9	Берилл	+	—	—
10	Воробьевит	+	—	+
11	Петалит	+	—	—
12	Ортит	—	—	—

Знак + означает присутствие данного элемента в минерале, а знак — отсутствие его.

Нужно отметить, что в отношении чувствительности при определении Li, Rb и Cs дуга превосходит искру.

Ввиду того, что в мусковитах находится значительное количество железа, определение Rb в них оказалось невозможным. Также нельзя было решить вопрос и о присутствии Cs в некоторых минералах. Поэтому были сняты дуговые спектры минералов на дифракционной решетке во втором порядке. Вследствие большой дисперсии, даваемой решеткой, фон значительно ослаблялся и линии исследуемых элементов выступали более интенсивно и четко.

Кроме того достигалось разделение линии Rb 4201.8 от линии Fe 4202.0 и линии Cs 4555.3 от линии Ba 4554.0.

Условия опыта: щель 0.015 мм, сила тока 15 амп., экспозиция 6′. Результаты собраны в табл. 4.

Таблица 4

№№ по порядку	Название	Li	Rb	Cs
1	Мусковит I	+	+	—
2	Мусковит II	—	—	—
3	Мусковит III	—	—	—
4	Флогопит	+	—	—
5	Лепидолит I	+	+	+
6	Лепидолит II	+	+	+
7	Микроклин	+	+	—
8	Ортоклаз	—	+	+
9	Берилл	+	—	—
10	Воробьевит	+	+	+
11	Петалит	+	—	—
12	Ортит	—	—	—

Снимки производились на пластинках 6 × 9 см в области от 4620 Å до 4000 Å.

Таким образом, на решетке удалось отчетливо установить Rb еще в мусковите I и воробьевите, а Cs в лепидолитах I и II и ортоклазе. Кроме того, подтверждены остальные результаты качественных определений на большом кварцевом спектрографе.

Из исследований над спектрами Li, Rb и Cs известно, что интенсивность первых членов главной серии лития, рубидия и цезия в десятки раз превышает интенсивность вторых членов (27).

Первые дублеты главных серий этих элементов лежат (за исключением Li) в инфракрасной области, недоступной визуальному наблюдению, а обычные фотопластинки не чувствительны к этому участку спектра. Благодаря наличию в настоящее время хороших сенсибилизаторов для этой области последнее затруднение легко устранимо.

В следующей таблице приведены длины волн первых дублетов главных серий.

Таблица 5

Элемент	Сериальный символ	Длина волны в Å
Li	$2^2 S_{1/2} - 2^2 P_{1/2, 3/2}$	6707.8
Rb	$5^2 S_{1/2} - 5^2 P_{3/2}$	7800.3
Rb	$5^2 S_{1/2} - 5^2 P_{1/2}$	7947.6
Cs	$6^2 S_{1/2} - 6^2 P_{3/2}$	8521.1
Cs	$6^2 S_{1/2} - 6^2 P_{1/2}$	8943.6

Так как компоненты дублетов ($P_{3/2}$) в 2 раза интенсивнее соответственно ($P_{1/2}$), то естественно, что внимание было сосредоточено на первых. Для лития оба компонента при данных условиях сливаются в одну линию.

Для этих линий здесь нужно отметить следующее: линия 6707.8 очень удобна для определения Li. Лежащие вблизи линия Ca — 6717.7 и линия Ba 6693.8 вполне разрешаются стеклянным спектрографом, на котором были проведены все определения по первым дублетам. Линия 7800.3 также весьма удобна для определения Rb, линия же 7947.6 совпадает с линией Cs 7944.0 и линией Fe 7945.9. Определение Cs по линии 8521.1 может вызвать сомнение только при наличии значительных количеств Ba (линия 8514.2). Линия 8943.6 мало чувствительна. Все эти данные принимались во внимание также при количественных определениях. Кроме того в этой же области лежат: линии K с длинами волн 7664.9 и 7699.0 (соответственно $4^2S_{1/2} - 4^2P_{3/2}$ и $4^2S_{1/2} - 4^2P_{1/2}$), линия Li 8126.4 ($2^2P_{1/2,3/2} - 3^2S_{1/2}$) и линии Na 8183.3 и 8194.9 ($3^2P_{1/2,3/2} - 3^2D_{3/2,5/2}$).

Сенсибилизатором для области от 7000 Å до 9000 Å является неоцианин, поглощение которого изучено Dundon'ом (28), Schven'ом и Briggs'ом. Область поглощения для неоцианина лежит между 7000 Å и 9000 Å с максимумом поглощения при 8300 Å. Эти авторы дают следующий рецепт сенсибилизации. Пластинку купают в течение 1 минуты в водном растворе, содержащем 0.0005% неоцианина и 25% спирта. После этого пластинку купают в течение 30″ в спирте и быстро высушивают. Высушенную пластинку затем купают в 4% растворе NH_4OH и опять высушивают. Этот рецепт и был использован в данной работе.

Ввиду наличия соответственного сенсибилизатора, а также наличия сведений об интенсивностях первых дублетов главных серий Li, Rb и Cs и была сделана попытка ориентироваться на последние. Как показали последующие опыты, эта попытка привела к весьма хорошим результатам.

Для установления положения линий были сняты дуговые спектры чистых (Kahlbaum) хлористых солей K, Na, Li, Rb и Cs в отдельности, попарно и все вместе. Линии указанных элементов удобно располагаются на небольшой части пластинки.

Для избежания появления сильной вуали желательно хорошо защитить оптическую систему спектрографа от постороннего света, а также работать в темной комнате. Тогда пластинки получаются хорошей прозрачности с очень незначительной вуалью, что, конечно, очень благоприятно для расшифровки спектров.

Снимки непосредственно минералов в дуге в этой области показали, что последняя является весьма удобной для быстрого качественного определения Li, Rb и Cs. Результаты приведены в табл. 6. Условия опыта: щель 0.01 мм, сила тока — 6.5 амп., экспозиция 1′.

Таблица 6

№№ по порядку	Название	Li	Rb	Cs
1	Мусковит I	+	+	+
2	Мусковит II	+	+	—
3	Мусковит III	+	+	—
4	Флогопит	+	+	—
5	Лепидолит I	+	+	+
6	Лепидолит II	+	+	+
7	Микроклин	+	+	+
8	Ортоклаз	+	+	+
9	Берилл	+	+	+
10	Воробьевит	+	+	+
11	Петалит	+	—	—
12	Ортит	неясно	—	—

Установить факт присутствия или отсутствия лития в ортите весьма затруднительно, ввиду совпадения линии 6707.8 с линией 6709.5 лантана, последний же в ортите обнаружен в заметных количествах.

Количественное определение Li, Rb и Cs

Так как качественные определения Li, Rb и Cs по первым дублетам дали хорошие результаты, то все последующие количественные определения были проведены только по ним.

Ввиду того, что дуга представляет собой источник света непостоянного характера, трудно поддающегося сохранению равенства условий, то в ней были предприняты определения только порядка количества Li, Rb и Cs непосредственно в самих минералах. В качестве метода количественного определения был избран метод сравнения интенсивностей линий с интенсивностями тех же линий в эталонах, содержащих определенные количества Li, Rb и Cs.

Все исследуемые минералы представляют собой алюмосиликаты, мало отличающиеся по содержанию главных составных частей (Al, Si, O). Поэтому твердые эталоны готовились следующим образом: был вычислен средний состав минералов, и из определенного сорта стекла и $Al(OH)_3$ готовилась смесь, отвечающая составу минералов. Хорошо смешанная и растертая смесь обливалась раствором, содержащим в определенных количествах одновременно Li, Rb и Cs в виде хлористых солей. Смесь высушивалась и затем спекалась в платиновом тигле при светло-красном калении. По охлаждении она снова растиралась в мелкий порошок и в таком виде употреблялась для съемок. Чтобы проверить, не улетучиваются ли

при этой температуре спекания Li, Rb и Cs, были сделаны параллельно такие же эталоны, но спекались они при темнокрасном калении. Сравнение тех и других спектральным путем показало их полную идентичность. Таким путем были приготовлены три твердых эталона с 0.001%, 0.01%, и 0.1% Li, Rb и Cs.

Для съемок отвешивалось по 0.01 г эталонов и минералов. Эти количества вводились в канал нижнего угля. Сначала снимались на пластинке эталоны в порядке возрастающей концентрации, а затем минералы.

Условия опыта: щель 0.01 мм, сила тока 6.5 амп., экспозиция — 1′.

Результаты приведены в табл. 7.

Таблица 7

№№ по порядку	Название	Пределы в %, между которыми лежит количество данного элемента		
		Li	Rb	Cs
1	Мусковит I	0.01—0.1	0.01—(0.1)	< 0.01
2	Мусковит II	<0.001	0.001—(0.01)	нет
3	Мусковит III	<0.001	0.001—(0.01)	нет
4	Флогопит	0.001—(0.01)	(0.001)—0.01	нет
5	Лепидолит I	>1.0	> 0.1	(0.01) — 0.1
6	Лепидолит II	>1.0	> 0.1	(0.01) — 0.1
7	Микроклин	0.01—0.1	(0.01) — 0.1	(0.001)—0.01
8	Ортоклаз	~0.001	> 0.1	0.01 —(0.1)
9	Берилл	0.01—(0.1)	0.001—(0.01)	0.01
10	Воробьевит	>0.1	(0.001)—0.01	> 0.1
11	Петалит	>1.0	нет	нет
12	Ортит	не определ.	нет	нет

В том случае, когда количество того или иного элемента (судя по интенсивности линий) близко подходит к одному из указываемых пределов, в круглые скобки взят другой предел.

Нужно заметить, что линия Rb 7800.3 едва заметна при 0.001%, а линия Cs 8521.1 почти не видна при той же концентрации. Увеличивая экспозицию, силу тока и количество вводимых веществ, можно обнаружить концентрации и ниже 0.001%.

То обстоятельство, что Li, Rb и Cs в эталонах находятся в виде хлористых солей, а последние более летучи, чем силикаты Li, Rb и Cs, приводит к тому, что необходимое для количественных определений равенство условий здесь не соблюдено.

Более точные количественные исследования показали, что метод с твердыми эталонами вполне пригоден для определения порядка количеств Li, Rb и Cs, причем не получается каких-либо значительных отклонений от действительных величин.

Несмотря на то, что искра менее чувствительна для Li, Rb и Cs, чем дуга, были предприняты количественные опыты и в ней.

Для выяснения чувствительности был приготовлен ряд растворов с содержанием 0.001, 0.003, 0.01, 0.03, 0.1 и 0.4% (в расчете на металл) Li, Rb и Cs одновременно. Последние брались в виде хлористых солей. Экспозиция увеличена до 10′, сила тока — 3.5 амп., щель — 0.05 мм. Раствор (эталон) вводился в уголь по 0.05 см³ через каждую минуту. Результаты приведены в табл. 8.

Таблица 8

Элемент	Длина волны	Сериальный символ	Концентрация в % на металл					
			0.4	0.1	0.03	0.01	0.003	0.001
Li	8126.4	$2^2P_{1/2, 3/2} - 3^2S_{1/2}$	+	+	+	+	—	—
Li	6707.8	$2^2S_{1/2} - 2^2P_{1/2, 3/2}$	+	+	+	+	+	+
Li	6103.6	$2^2P_{1/2, 3/2} - 2^2D_{3/2, 5/2}$	+	+	+	+	—	—
Rb	7947.6	$5^2S_{1/2} - 5^2P_{1/2}$	+	+	+	+	неясно	
Rb	7800.3	$5^2S_{1/2} - 5^2P_{3/2}$	+	+	+	+	+	
Rb	4201.8	$5^2S_{1/2} - 6^2P_{3/2}$	+	+	+	неясно		
Cs	8943.6	$6^2S_{1/2} - 6^2P_{1/2}$	+	+	—	—	—	—
Cs	8521.1	$6^2S_{1/2} - 6^2P_{3/2}$	+	+	+	+	+	—
Cs	4555.3	$6^2S_{1/2} - 7^2P_{3/2}$	+	+	+	неясно		

Для всех указанных в таблице линий интенсивность их отчетливо падает с убыванием концентрации. Знак + показывает, что при данной концентрации данная линия видна на снимке, знак — что ее нет.

Линия Li 6707.8 резка и отчетлива при всех указанных концентрациях. Линиями 6103.6 и 8126.4 Å, ввиду их малой чувствительности, можно пользоваться для сравнения только при больших концентрациях Li.

Для Rb линией 4201.8 можно пользоваться только до 0.03%, так как при более низких концентрациях она маскируется линией Fe 4202.0, и поэтому нельзя решить вопроса, есть ли она при последующих концентрациях, или отсутствует. Линия 7800.3 вполне отчетлива до 0.003%, при 0.001% — она едва видима. Линия 7947.6 при концентрации 0.003% и ниже маскируется слабой линией Fe.

Для Cs линией 4555.3 можно пользоваться только до 0.03%, ниже отчетливость исчезает. Линия 8521.1 хорошо видна до 0.003%, при 0.001% она незаметна; увеличив экспозицию и количество вводимого раствора, можно обнаружить и эту концентрацию. Линия 8943.6, как уже было указано, совсем мало чувствительная, может быть вследствие того, что она лежит близко к границе поглощения неоцианина.

Таким образом Li и Rb при данных условиях могут быть отчетливо определены при концентрациях в 0.001% в растворе, а Cs — 0.003%, причем наиболее удобными являются линии 6707.8; 7800.3 и 8521.1, которые с полным основанием нужно назвать последними линиями этих элементов.

Анализ в искре требует более значительных количеств вводимых веществ, чем анализ в дуге. Поэтому были предприняты следующие шаги для выделения из минералов Li, Rb и Cs и их накопления. 1-й метод заключался в разложении минерала чистой плавиковой кислотой в присутствии H_2SO_4. После разложения минерала и удаления нагреванием плавиковой кислоты остаток был выщелочен 2 см³ воды. Раствор после отстаивания сливался и подвергался количественному анализу в искре, причем на той же пластинке снимались и растворы-эталоны. Эти эталоны содержали, кроме Li, Rb и Cs, еще и определенный процент Na и K, которые подобно Li, Rb и Cs вводились в виде хлористых солей. Калий вводился только там, где по предварительному расчету по формуле минерала, его было мало. Это делалось потому, что имевшийся в нашем распоряжении KCl (Kahlbaum) содержал около 0.001% рубидия, который при большой концентрации KCl вполне отчетливо обнаруживался.

Там, где по составу минерала калия оказывалось много, он в эталоне заменялся соответственным количеством натрия. Эта замена вполне возможна, ввиду близости резонансных и ионизационных потенциалов Na и K.

Опыты показали, что результаты получаются очень несходными и сбивчивыми. Это, очевидно, происходит по следующим причинам. В растворах минералов, кроме щелочных металлов, находились еще в значительных количествах Ca, Al, Fe и др. металлы, тогда как в растворы эталонов ничего, кроме K и Na, не добавлялось. Кроме того, все щелочные (и другие) металлы в растворах минералов находились в виде сернокислых солей, тогда как эталоны приготовлялись из хлористых солей. Первые же, как известно, гораздо менее летучи, чем последние. Были поставлены специальные опыты для сравнения эталонов, приготовленных из хлористых и из сернокислых солей. Они показали, что эталоны из сернокислых солей заметно менее чувствительны, чем соответствующие эталоны из хлористых солей; особенно заметна разница при малых концентрациях Li, Rb и Cs.

Таким образом, налицо имеется значительное неравенство условий при таком методе количественных определений, что, очевидно, и привело к неблагоприятным результатам. Поэтому выделение Li, Rb и Cs было произведено по способу Lawrence Smith'a (29): 1 г минерала сплавлялся с $CaCO_3$ и NH_4Cl и затем путем отделения от других примесей доводился до суммы хлористых щелочей. Эта сумма взвешивалась для того, чтобы более точно подогнать эталоны по содержанию K и Na. Затем хлористые щелочи из минерала были растворены в 2 см³ H_2O. В таком растворе они поступали для количественного спектраль-

ного анализа. Для каждого минерала были приготовлены специальные растворы-эталоны. Калий, как и прежде, для того минерала, где его оказывалось много, заменялся в соответствующем эталоне на натрий.

Для тех минералов, которые близки по своему составу друг к другу (напр., мусковиты, лепидолиты), приготовлялись одинаковые эталоны.

Такому методу анализа были подвергнуты все минералы за исключением мусковитов II и III и ортита.

На пластинке снимались в порядке возрастающей концентрации эталоны, а затем соответствующие минералы.

Растворы тех и других вводились в уголь по 0.05 см³ через каждую минуту. Экспозиция — 10′, сила тока 3.5 амп., щель — 0.05 мм.

Так как ортоклаз при первых определениях дал количество рубидия более 0.4%, то он был разбавлен в 10 и 100 раз и снят с соответствующим эталоном. Результаты получились хорошо совпадающие для того и другого разбавления. То же было сделано в отношении лепидолитов I и II. Окончательные результаты количественного анализа собраны в табл. 9.

Таблица 9

№№ по порядку	Название	% элементов в минерале		
		Li	Rb	Cs
1	Мусковит I	0.08	0.1	0.004
2	Мусковит II	—	—	—
3	Мусковит III	—	—	—
4	Флогопит	0.004	0.007	—
5	Лепидолит I	> 1.0	0.7	0.06
6	Лепидолит II	> 1.0	0.8	0.04
7	Микроклин	0.08	0.1	0.007
8	Ортоклаз	0.002	1.2	0.06
9	Берилл	0.04	0.006	0.006
10	Воробьевит	0.4	0.008	0.4
11	Петалит	> 1.0	—	—
12	Ортит	—	—	—

При рассмотрении полученных данных обращает на себя внимание ортоклаз с содержанием Rb выше 1%. Исследовавшийся воробьевит, ввиду значительного преобладания атомной концентрации Li над таковой для Cs (8 : 1) правильнее было бы назвать не цезиевым, а литиево-цезиевым бериллом.

Кроме качественного и количественного определения Rb, Cs и Li, были произведены также качественные определения некоторых других элементов в исследовавшихся минералах. Результаты этих определений собраны в табл. 10.

Таблица 10

Название	Na	K	Ca	Sr	Ba	Mg	Be	Al	Ga	Fe	Cr	Mn	Si	Ti	Cu	V	La
Мусковит I	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	—	не определялось
Мусковит II	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	—	+	+	+	+	—	
Мусковит III	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	—	+	+	+	+	—	
Флогопит	+	+	+	+	+	+	—	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
Лепидолит I	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	—	—	
Лепидолит II	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	—	—	
Микроклин	+	+	+	+	+	+	+	+	+	—	+	+	+	+	+	—	
Ортоклаз	+	+	+	—	+	+	+	+	+	—	—	+	+	+	+	—	
Берилл	+	+	+	—	+	+	+	+	+	+	—	—	+	—	—	—	
Воробьевит	+	+	—	+	+	—	+	+	+	—	—	—	+	—	—	—	
Петалит	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	—	—	+	—	—	—	
Ортит	+	+	+	—	—	+	+	+	+	+	+	+	+	+	—	—	+

Знак + обозначает присутствие элемента в минерале, знак — обозначает отсутствие.

Мусковиты II и III содержат значительно меньшее количество Be, чем мусковит I. В то же время в мусковите I имеется небольшое количество Cr, тогда как в мусковитах II и III его нет. Флогопит дает заметное количество Ba. Be в нем, как и в мусковите II и III, следы. Нужно отметить воробьевит, который не содержит Ca, Mg, Fe и Mn, тогда как в большинстве минералов того же месторождения эти элементы имеются в значительных количествах. Ортит содержит ничтожные количества щелочей по сравнению с другими минералами, но в нем имеются значительные количества Mg, Ca, Fe. Be и Si в нем мало по отношению к другим минералам. Лепидолиты I и II, микроклин и ортоклаз содержат по отношению к другим минералам большие количества Ga.

Выводы

1. Качественные и количественные определения Li, Rb и Cs лучше всего вести по интенсивным составляющим первых дублетов главных серий. При применении в качестве сенсибилизатора неоцианина чувствительность определений получается более высокой, чем при работе со вторыми дублетами.

2. Линия Rb 7800.3, линия Cs 8521.1 и линия Li 6707.8 при употреблявшейся методике исчезают последними при уменьшении концентрации и поэтому с полным основанием могут быть названы последними линиями этих элементов.

3. Для качественных определений Li, Rb и Cs очень удобным источником света является дуга.

4. Для определения порядка количеств Li, Rb и Cs удобен и быстр метод сравнения с твердыми эталонами, состав которых, кроме содержания определенных количеств Li, Rb и Cs, должен по возможности близко подходить к составу исследуемых минералов.

5. Для точных количественных определений Li, Rb и Cs, последние необходимо выделять из минералов в виде хлористых солей и работать уже с ними, применяя метод сравнения с растворами-эталонами. Применение в качестве источника света искры, ввиду большого ее постоянства по сравнению с дугой, дает весьма удовлетворительные результаты.

В заключение пользуюсь случаем выразить сердечную благодарность А. Н. Филиппову за его неизменный интерес к данной работе и повседневные ценные советы и указания.

Ленинград.
Гос. Оптический институт
Лаборатория спектрального анализа.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Gramont. C. R. 176, 1104, 1923.
2. A. Gramont. Bull. Soc. Chim. France (3) 19, 742, 1898.
3. A. Gramont. Bull. Soc. d. Minér. France, 21, 113, 1898.
4. В. И. Вернадский. Изв. Акад. Наук, 1909, 163.
5. В. И. Вернадский. Изв. Акад. Наук, 1909, 821.
6. В. И. Вернадский. Изв. Акад. Наук, 1911, 561.
7. В. И. Вернадский. Тр. Геол. муз. Акад. Наук, 1908.
8. В. И. Вернадский. Изв. Акад. Наук, 1932.
9. В. И. Вернадский и Ревутская. C. R , 151, 1372, 1910.
10. W. N. Hartley. Phil. Trans. Roy. Soc., 185, 161, 1894.
11. A. Lacroix. Minéralogie de Madagascar, Paris, 1922, 2, 315.
12. M. R. Bossuet. C R., 196, 1381, 1933.
13. M. R. Bossuet. Bull. Soc. Chim. France, 51, 681, 1932.
14. G. O. Wild und Klemm. Zbl. f. Miner., Geol. und Pal., A, 295, 1925.
15. A. Brun. Arch. d. Sci. Phys. et Nat., 43, 487, 1917.
16. H. Ramage. Nature, 123, 601, 1929.
17. M. Rupp. Z. f. Unters. d. Nahr. und Genuss., 23, 56, 1912.
18. L. Erdmann. Journ. f. prakt. Ch., LXXXVI, 448, 1862.
19. P. Barbier. Bull. Soc. d. Minér. France, 31, 152, 1908.
20. A. G. G. Leonard and P. Whelan. Proc. Roy. Dublin Soc., II, № 24,1918.
21. E. Wilke-Dörfurt. Z. f. Kali 6, 245, 1912.
22. F. A. Gooch und Phinney. Amer. Journ. Sci. III ser., 44, 392, 1892.
23. W. O. Robinson. Chem. Zbl. 1918, II 310.
24. K. Hukuda. Bull. Chem. Soc. Japan, 2, 115, 1927.
25. L. Fresenius. Z. f. anal. Ch., 86, 182, 1931.
26. V. M. Goldschmidt и др. Nachricht. d. Wiss. Ges., Göttingen, Phys.-math. Kl., 1933, p. 235.
27. А. Н. Филиппов. Тр. Опт. инст., 8, вып. 85, 1932.
28. Briggs, Dundon, Schwen. Journ. Opt. Soc. Amer., 12, 397, 1926.
29. Lawrence Smith. Ann. Chem. und Pharm., 159, 82, 1871.

G. TOLMAČEV. QUALITATIVE AND QUANTITATIVE DETERMINATION OF Li, Rb AND Cs MADE SPECTROSCOPICALLY

SUMMARY

Qualitative and quantitative determination of Li, Rb and Cs in 12 minerals was made. The lines used chiefly for analysis were: 6707.8 (Li), 7800.3 (Rb) and 8521.1 (Cs). The plates were sensibilized by neocyanine. An electrical arc was used as source of light for qualitative determination, a spark — for quantitative ones. Li, Rb and Cs were extracted from the minerals in the form of chlorides. We would like to turn attention on an orthoclase (Murzinka, Ural) analysed by as, the amount of Rb in whish reaches 1.2%.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1934
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАЩИТНЫХ ПЛЕНОК НА МАГНИИ, ПОЛУЧАЕМЫХ С ПОМОЩЬЮ РАСТВОРОВ СИЛИКАТА НАТРИЯ И ДВУХРОМОВОКАЛИЕВОЙ СОЛИ

И. В. КРОТОВА и Г. Г. ИВАНОВА

(*Представлено академиком* В. А. Кистяковским)

1. Введение

Литература по предохранению магниевых сплавов от коррозии весьма обширна, но литература, посвященная защите магния от коррозии, сравнительно бедна (см. список в конце настоящей статьи). Нам представлялось интересным выяснить возможность получения защитных пленок на магнии способом, предложенным И. В. Кротовым, т. е. при пользовании растворами силиката натрия с добавками двухромовокалиевой соли. Для наших опытов мы пользовались листовым магнием фирмы Kahlbaum. Полоски магния перед погружением в ванну тщательно очищались подпилком и затем протирались тщательно ватой со спиртом. Источником силиката натрия у нас было техническое растворимое стекло следующего состава по весу: SiO_2 — 33.3%; Fe_2O_3 — 0.2%; Al_2O_3 — 0.16%; CaO — 0.08%; MgO — 0.01%. Так как техническое растворимое стекло содержало в себе взвесь разных механических загрязнений, то после разведения его водой полученный более разбавленный раствор подвергался фильтрованию. Исходным раствором силиката натрия в почти всех наших опытах был следующий: на 120 см³ технического растворимого стекла 680 см³ воды. Двухромовокалиевая соль была взята химически чистая. Для суждения о качестве получаемой на поверхности магния пленки применялся метод нанесения на покрытую пленкой поверхность капель 3% раствора хлористого натрия. Под каплями изменения поверхности, в обычных атмосферных условиях, происходят очевидно тем в меньшей степени, чем коррозионноустойчивее пленка на поверхности магния. Получение пленки на поверхности магния совершалось путем электролиза в ванне, содержащей силикат натрия и двухромовокалиевую соль при условии, что магний являлся анодом, а железная полоска катодом. Получавшийся в этих условиях слой кремнекислоты на поверхности магния счищался и под ним оказывалась прочная пленка.

Сводная таблица составов и температур ванн, условий электролиза, температур и длите

№ по порядку	Обозначения ванн	Какой фактор исследуется	См³ раствора Na_2SiO_3 (120 см³ техн. раствора стекла на 6-0 см³ воды)	См³ 30% раствора $K_2Cr_2O_7$	См³ H_2O	Температ. ванн	Расстояние между катодом и анодом в см	Сила тока в амперах	Площ. анода см²	Анодная плотность тока амп./см²	Площ. катода см²	Катодная плотность тока амп./см²	Напряжение на зажимах ванны
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	99	Исследование концентрации $K_2Cr_2O_7$	180	3	17	15°	9	0.25	16.5	0.015	16.5	0.015	4.5
2	97-а		180	6	14	15°	9	0.25	16.5	0.015	16.5	0.015	5—9.5
3	96-а		180	9	11	14°	9	0.25	16.5	0.015	16.5	0.015	5—9.5
4	98		180	20*	—	15°	9	0.25	16.5	0.015	16.5	0.015	5
5	100	Исследование концентрации растворимого стекла	120**	6	74	15°	9	0.25	16.5	0.015	16.5	0.015	4—6.5
6	101		80	6	114	15°	9	0.25	16.5	0.015	16.5	0.015	7—5.9
7	102	Исследование влияния температуры ванны	180	6	14	28°	4.5	0.25	16.5	0.015	16.5	0.015	2.5—5
8	105		180	6	14	34—39°	4.5	0.25	16.5	0.015	16.5	0.015	2.5—5

Таблица 1

ости сушки покрытых пленкой образцов магния и характеристик полученных результатов

Длительн. электролиза в минутах	Температ. сушки	Длительн. сушки	Характеристика пленки	Результаты испытания каплями 3% раствора NaCl	Примечания
15	16	17	18	19	20
20	Комнатная	Сутки	Неоднородная, имеются темно-серые и относительно более светло-серые места	Не выдерживает; после смывания продуктов коррозии глубокие следы. Впоследствии места, где были капли, опять покрываются белыми продуктами коррозии	На табл. I А изображены фотографические снимки с образцов 99, 97-а, 96-а и 98 после испытания каплями 3% раствора NaCl (нанесения капель, высыхания их, смывания продуктов коррозии и пребывания после такой обработки на воздухе некоторое время).
20	»	»	Однородная темно-серая пленка	Сначала по всему полю капли появляются пузырьки, которые сливаются потом в меньшее колич ство больших по размеру пузырьков. В некоторых местах поля капли остаются после смывания капель поврежд пленки	Выбрано было содержание 6 см³ 3% раствора $K_2Cr_2O_7$ по той причине, что при таком содержании $K_2Cr_2O_7$ (соотв ванне 97-а) получается наиболее однородная пленка и более прочная в сравнении с 99, 96-а, 98. При рецепте 97-а часть поля капли раствора NaCl совершенно не испытывает разрушения. Эта не подвергшаяся разрушению часть поля капли наибольшая в случае 97-а в сравнении с остальными 99, 96-а и 98
20	»	»	Почти однородная серо-черная пленка	По высыхании капель на их местах белый налет; по удалении налета следы разрушения; через некоторое время опять налет на полях капель	
14	»	»	Зеленовато-черная неоднородная пленка	Сильное разрушение по всему полю капли	* 6% раствор $K_2Cr_2O_7$
20	Комнатная	Сутки	Однородная темно-серая поверхность	Не выдерживает, все поле капли сильно разъедено, пленка постепенно седеет	На табл. I В изображен фотографический снимок с образцов 100, 97-а и 101 после испытания каплями раствора NaCl (нанесения капель, высыхания их, смывания продуктов коррозии и пребывания после такой обработки на воздухе некоторое время). Наилучшее содер. растворимого стекла отвечает 180 см³ раствора (120 см² техн. раств. стекла и 680 см³ воды) в объеме 200 см³ соответственно рецепту 97-а. При большем содержании растворимого стекла пленка легко разр шается, грубая. При меньшем содержании растворимого стекла пленка также не прочна и груба
20	»	»	Неоднородная пленка: светло-серые и темно-серые места	Не выдерживает; все поле капли разъедено; пленка постепенно седеет	** 500 см³ технич. раств. стекла на 500 см³ воды
20	Комнатная	Сутки	Сплошное однородное серо-черное покрытие, более темное, чем в случае 103 и 104	Подвергается действию, но более сильному, чем 97-а	На табл. II С изображены фотографические снимки с образцов 97-а, 102, 105, 103, 104. Наилучшая температура ванны комнатная, отвечающая рецепту 97-а, т. е. около 15° С. При более высоких температурах хотя и имеются не разъеденные места
20	»	»	Однородная темно-серая поверхность	Не выдерживает, хотя есть места поля капли не поврежденные, но	

№ по порядку	Обозначение ванн	Какой фактор исследуется	См³ раствора Na_2SiO_3 (120 сNм³ техн. раств стекла на 680 см³ воды)	См³ 3% раствора $K_2Cr_2O_7$	См³ H_2O	Температ. ванн	Расстояние между катодом и анодом в см	Сила тока в амперах	Площ. анода см²	Анодная плотность тока амп./см²	Площ. катода см²	Катодная плотность тока амп./см²	Напряжение на зажимах ванны
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
9	103	Исследование влияния температуры ванны	180	6	14	45—49°	4.5	0.25	16.5	0.015	16.5	0.015	2.5—3
10	104		180	6	14	70°	4.5	0.25	16.5	0.015	16.5	0.015	1.5—2
11	107	Изучение влияния плотности тока	180	6	14	15°	9	0.15	16.5	0.009	16.5	0.009	3.5—
12	108		180	6	14	15°	9	0.35	16.5	0.021	16.5	0.021	7—10
13	109	Изучение влияния нагревания полученной пленки	180	6	14	15°	9	0.25	16.5	0.015	16.5	0.015	5.5—6
14	110		180	6	14	15°	9	0.25	16.5	0.015	16.5	0.015	5—6.
15	111		180	6	14	15°	9	0.25	16.5	0.015	16.5	0.015	5—10
16	112	Исследование влияния продолжительности электролиза	180	6	14	15°	9	0.25	16.5	0.015	16.5	0.015	5—5.
17	113		180	6	14	15°	9	0.25	16.5	0.015	16.5	0.015	5—9

(Продолжение)

Длитель. электролиза в минутах	Температ. сушки	Длитель. сушки	Характеристика пленки	Результаты испытания каплями 3% раствора NaCl	Примечания
15	16	17	18	19	20
				в местах повреждения полная разъеденность поверхности магния	на полях капель, но в местах разъедания у этих образцов более сильное разрушение, чем у образца 97-а. Кроме того, образцы 103 и 104 не сплошь покрыты пленкой
20	Комнатная	Сутки	Светло-серая поверхность, более темная, чем 104. Имеются светлые, непокрытые пленкой точки	Действует слабее, чем на 102 и 105, площадь не разъеденных мест в поле капли еще меньше, чем у 102	
20	»	»	Пленка светло-серая неоднородная, не покрывающая целиком всю поверхность	Сравнительно слабо действует; на местах капель после смывания незначительных продуктов коррозии видны части полей капель, не подвергшиеся разрушению	
20	Комнатная	Сутки	Однородная серо-черная пленка	Не выдерживает; разъедание сильнее, чем у 97-а	На табл. II D прив. фотографии образцов 107, 97-а и 108 после нанесения капель 3% раствора NaCl, высыхания их, смывания продуктов коррозии и пребывания в течение некоторого времени на воздухе. Лучшая сила тока 0.25 амп. (плотность тока 0.015 амп./см^2), отвечающая рецепту 97-а
20	»	»	То же	Не выдерживает, хотя имеются на полях капель места не разъеденные. Разъедание сильнее, чем у 98-а	
20	50—60°	1 час.	Однородная серо-черная пленка	Довольно хорошо выдерживает. На полях капли имеются места, почти не тронутые коррозией	На табл. III E прив. фотографии образцов 97-а, 109, 110 и 111 после нанесения капель 3% раствора NaCl, высыхания их, смывания продуктов коррозии и пребывания в течение некоторого времени на воздухе. Лучшая температура сушки готовой пленки около 120°С, так как после такой сушки получается наиболее устойчивая против коррозии в 3% растворе NaCl пленка
20	103—118°	1 »	То же	Выдерживает; поле капли только в незначительной степени белеет, с одного края каждой капли остаются более глубокие впадины от разъедания	
20	163—179°	1 »	То же	Выдерживает; поле капли еще меньше изменилось, чем у 109 и 110. Белые пятна продуктов коррозии по краям полей, первоначально занятых каплями, еще меньше, чем у 109 и 110. но имеется более глубокая точечная коррозия у 111 . сравнит. с 110	
5	Комнатная	Сутки	Пленка не однородная светло-серая, местами нет совсем пленки	Не выдерживает; сильное разъедание по всему полю капли	На табл. III F прив. фотографии образцов 112, 97-а и 113 после нанесения капель 3% раствора NaCl, высыхания их, смывания продуктов коррозии и пребывания в течение некоторого времени на воздухе. Лучшая длительность электролиза 20 минут, что соответствует рецепту 97-а
30	»	»	Однородная серо-черная пленка	То же	

2. Условия получения пленок на магнии и характеристика полученных результатов

В приводимой выше таблице (на стр. 922—925) даны составы и температуры ванн, условия электролиза, температуры и длительности сушки покрытых пленками образцов магния и характеристики полученных результатов. Фотографии, помещенные на иллюстрационных таблицах I (A, B), II (C, D) и III (E, F, G) (см. ссылки на них в сводке данных цифровой табл. 1), показывают свойства полученных нами пленок на магнии в смысле стойкости этих пленок против коррозии каплями 3% раствора NaCl. Сама табл. 1 особых пояснений не требует. Необходимо заметить, что в таблице приведена характеристика влияния каждого фактора, играющего роль в процессе получения пленки на магнии: 1) концентрация $K_2Cr_2O_7$, 2) концентрация Na_2SiO_3, 3) температура ванны, 4) плотность тока, 5) температура нагревания магния с пленкой, 6) продолжительность электролиза. Просматривая критически данные, приведенные в таблице, не трудно вывести заключение об условиях получения в нашей ванне наиболее стойкой против коррозии пленки на магнии. Условия эти следующие (см. порядковый № 14 или обозначение ванны 110):

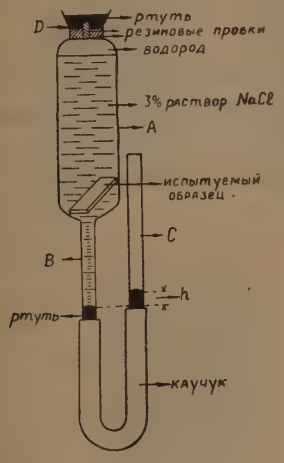
Раствора Na_2SiO_3 (120 см³ технического растворимого стекла на 680 см³ воды)	180 см³
3-процентного раствора $K_2Cr_2O_7$	6 см³
Воды	14 см³
Температура ванны около	15° C
Плотность тока	0.015 амп./см²
Расстояние между катодом и анодом	9 см
Напряжение на зажимах ванны	5—9.5 V
Время электролиза	20 минут
Образец магния с готовой пленкой сушится в течение часа при температуре около	120° C.

3. Испытание устойчивости против коррозии пленки на магнии, показавшей себя наиболее устойчивой в испытаниях каплями раствора хлористого натрия

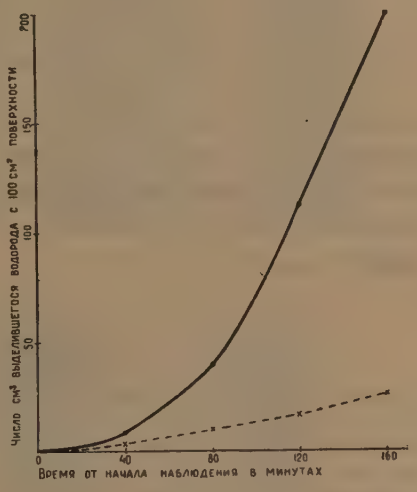
(В табл. 1 порядковый № 14, обозначение ванны 110)

Опыты велись при комнатной температуре. Измерялось количество выделявшегося водорода и отмечалось время. Представление о приборе, предложенном И. В. Кротовым и служившем для наших опытов, дает фиг. 1. Стеклянный цилиндрический сосуд *A*, емкостью приблизительно около 200 см³, суживается внизу и спаивается со стеклянной градуированной трубкой *B*, которая далее, посредством каучуковой трубки, соединяется с другой стеклянной трубкой *C*. Каучуковая трубка наполняется ртутью, которая частично находится и в стеклянных трубках *B* и *C*. В резервуар *A* наливается 3% раствор NaCl, пропускается в течение приблизительно $^1/_2$ часа водород, промытый в растворе $KMnO_4$, H_3PO_4 и NaCl, бросается испытуемый образец металла, покрытого или непокрытого

пленкой и, наконец, горло D резервуара A закрывается резиновой пробкой. На пробку сверху наливается ртуть, чтобы исключить диффузию водорода в окружающую среду. Разность уровней ртути в трубках B и C поддерживается постоянной и именно такой, которая необходима для уравновешивания столба раствора в резервуаре A. Количество выделившегося при коррозии металла водорода определяется по понижению уровня ртути в градуированной трубке B. Пользуясь прибором описанной конструкции, водород измеряют при постоянном атмосферном давлении и, кроме того, избегают какой бы то ни было потери водорода путем диффузии в окружающую среду. Полученные с помощью описанных приборов данные испытания на коррозию чистого магния и образца его, покрытого пленкой, представлены в табл. 2 и 3.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Таблица 2

Чистый магний

Время от нач. набл. в мин.	Число см³ выделивш. водорода с 100 см² поверхн. металла
0	0
40	8.6
80	40
120	113
160	200

Таблица 3

Магний с искусственной пленкой (см. табл. 1, № 14)

0	0
40	3.6
80	10
120	17
160	27

На фиг. 2 представлена графически зависимость между общим количеством выделившегося водорода и временем от момента погружения чистого магния

(табл. 2) и магния, покрытого пленкой (табл. 3), в 3% раствор хлористого натрия. Более круто поднимающаяся кривая характеризует выделение водорода со 100 см² поверхности не покрытого нашей пленкой магния; значительно более полого идущая кривая характеризует выделение водорода со 100 см² поверхности магния, покрытого пленкой.

На табл. III G представлена фотография с образца магния, покрытого пленкой по нашему способу (левый образец), и с образца магния, ничем не обработанного (правый образец), пробывших по $3^1/_2$ часа каждый в 3% растворе NaCl. В то время как на поверхности магния, покрытого пленкой, имеется сравнительно мало очагов коррозии, на поверхности магния, ничем не обработанного, таких очагов коррозии имеется очень много.

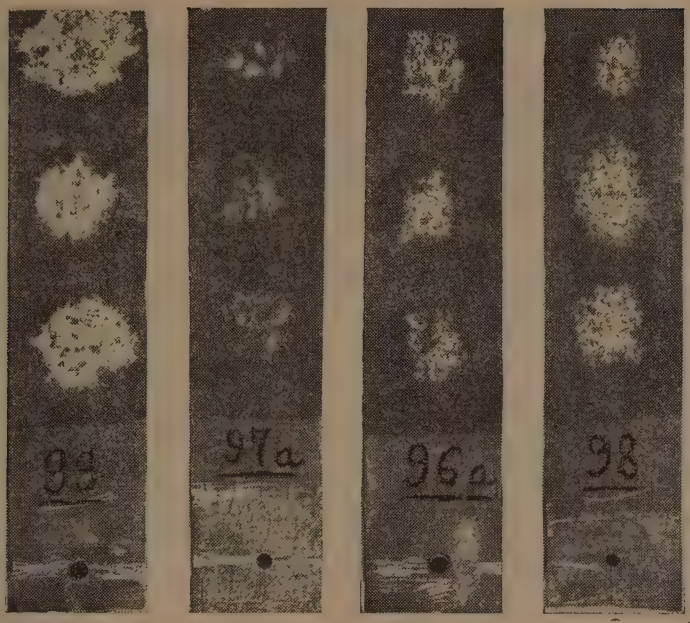
4. Вывод

Сделано систематическое исследование условий получения на магнии сравнительно стойкой против коррозии пленки путем электролиза в растворе, содержащем силикат натрия и двухромовокалиевую соль.

В заключение выражаем благодарность акад. В. А. Кистяковскому за ценные советы и указания.

ЛИТЕРАТУРА

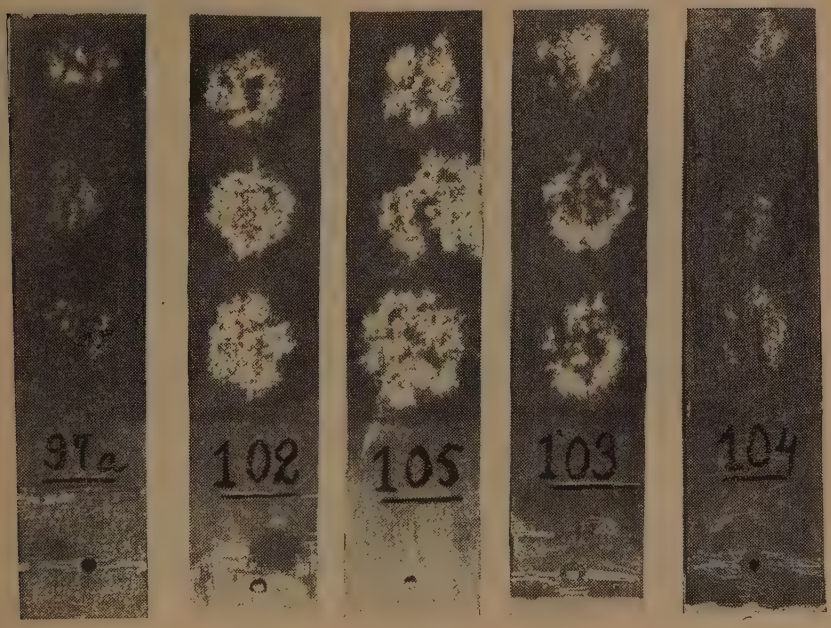
1. В. А. Кистяковский. Исследования по электрохимии двойных солей (пассивность магния). ЖРХО, т. XXXIII, стр. 600 и 601, 1901.
2. —— Классификация явлений, наблюдаемых при растворении магния. Там же, т. XXXIX, стр. 1454, 1907.
3. —— Активирование и пассивирование магния. Там же, стр. 1455, 1907.
4. —— Электрохимические реакции и электродные потенциалы некоторых металлов [докторская диссертация], стр. 1—177, 1910.
5. —— Электрохимия (учебник), стр. 380—389, Пгр., 1916.
6. I. Whitby. [Коррозия и предохранение магния и сплавов на магниевой основе.] Industr. Chemist, 10, 203—206, 1931.
7. Th. Leib und Fr. Kolke. [Поверхностные предохранения легких металлов.] Korrosion und Metallschutz, 7, 3—11, 1931.
8. H. Sutton, M. Sc., and L. F. Le Brocq, B. Sc. [Предохранение магниевых сплавов против коррозии.] The Journal of the Institute of Metals, vol. XLVI, № 2, 1931.
9. W. O. Kroenig und G. A. Kostylev. [Предохранение магниевых сплавов против коррозии протравливанием.] Korrosion und Metallschutz, 8, 147—151, 1932.
10. В. Крениг и Г. Костылев. Коррозия магниевых сплавов. I. Предохранение магниевых сплавов оксидными пленками. Труды Центр. Аэрогидродинамического института, № 128, 1932.
11. G. D. Bengough and L. Whitby. [Предохранение магниевых сплавов селеном и другие методы покрытий.] The Journ. of the Instit. of Metals, vol. XLVIII, № 1, 1932.
12. —— Idem. Part. II. Ibidem, vol. LII, № 2, 1933.



A

B

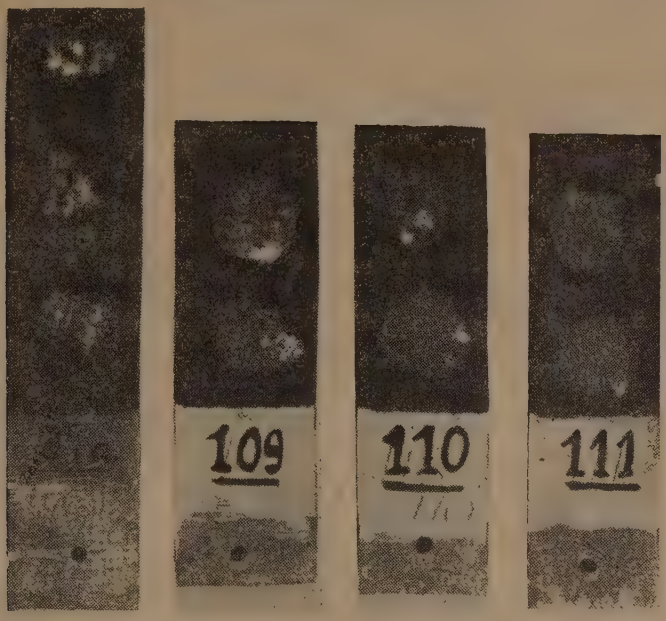
A — концентрация $K_2Cr_2O_7$. B — концентрация растворимого стекла.



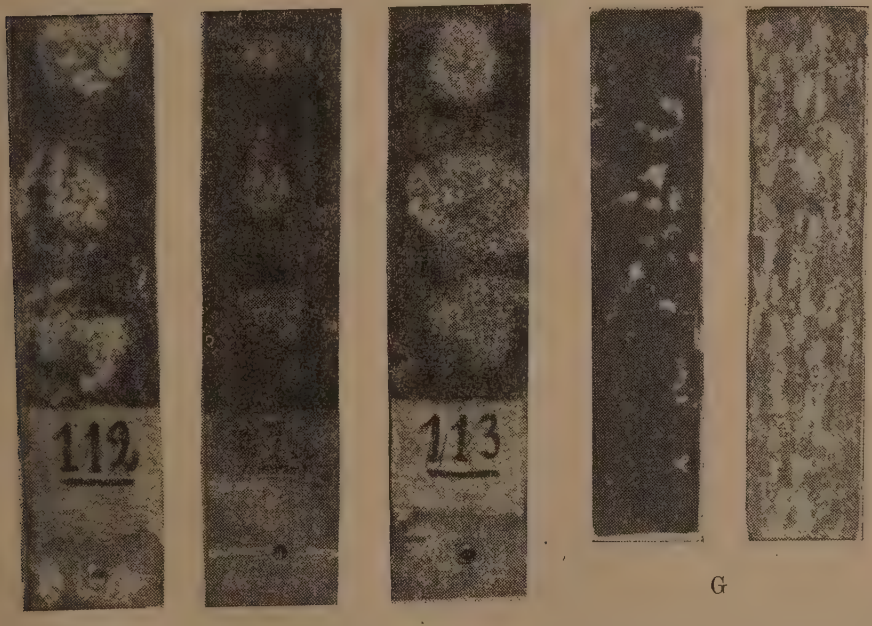
C

D

C — влияние температуры ванны. D — влияние плотности тока.



E



F G

E — влияние нагревания полученной пленки. F — влияние продолжительности электролиза. G — покрытый и непокрытый пленкой магний после испытания на коррозию в 3% растворе NaCl.

I. KROTOV ET G. IVANOV. ÉTUDE DES FILMS PROTECTEURS SUR LE MAGNÉSIUM, OBTENUS PAR ÉLECTROLYSE DANS LES SOLUTIONS DU SILICATE DE SODIUM ET DU BICHROMATE DE POTASSIUM

RÉSUMÉ

Les auteurs ont fait une étude systématique des conditions de la formation sur le magnésium d'un film relativement stable contre la corrosion au moyen de l'électrolyse d'une solution de silicate de soude et de bichromate de potassium avec le magnésium comme anode et le fer comme cathode. Les films les plus stables peuvent être obtenus dans les conditions suivantes: 1) électrolyte: solution de silicate de soude de commerce (33.3% SiO_2, 0.2% Fe_2O_3, 0.16% Al_2O_3, 0.08% CaO, 0.01% MgO, reste Na_2O et H_2O) 27 cm^3, solution de $K_2Cr_2O_7$ à 3% — 6 cm^3, H_2O — 167 cm^3; 2) température du bain 15° centigrades; 3) densité du courant — 0.015 ampères par centimètre carré; 4) distance entre les électrodes — 9 centimètres; 5) voltage sur les bornes du bain — de 5 à 9.5 volts; 6) durée d'électrolyse 20 min. Le spécimen avec le film formé (la couche supérieure de l'acide silicique doit être préalablement enlevée au moyen d'une spatule en corne) est séché pendant 1 heure à 120°.

La stabilité des films obtenus a été étudiée en mesurant le volume de l'hydrogène dégagé dans un appareil spécial décrit dans le texte (fig. 1).

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1934
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

КОМБИНИРОВАННОЕ ДЕЙСТВИЕ ИЗЛУЧЕНИЙ И КАТАЛИЗАТОРА. I. ВЛИЯНИЕ УЛЬТРАФИОЛЕТОВЫХ ИЗЛУЧЕНИЙ НА КАТАЛИТИЧЕСКУЮ АКТИВНОСТЬ КАТАЛИЗАТОРА ПРИ КАТАЛИЗЕ ПЕРЕКИСИ ВОДОРОДА В ВОДНОМ РАСТВОРЕ

Л. В. ПИСАРЖЕВСКОГО, Р. К. КОРАБЕЛЬНИК и Е. С. РЫНСКОЙ

Еще в 1920 г. одним из нас было указано на возможность усиления каталитической активности катализатора путем действия на него излучений во время его работы.

Первые ориентировочные опыты в этом направлении были произведены в 1922 г. в лаборатории общей химии Днепропетровского Горного института.

Попытка разобраться в механизме комбинированного действия излучений и катализаторов была сделана одним из нас в двух статьях в 1925 г. и 1929 г.[1] и в его докладе на декабрьской сессии Академии Наук СССР (1931 г.).

В настоящее время в лабораториях Института физической химии ведутся работы по изучению влияния излучений на адсорбцию и комбинированного действия излучений и катализатора. Некоторые из них закончены и подготовляются к печати. Общий обзор этих работ и теоретическое их истолкование будут даны в особой статье в Докладах Академии Наук.

Здесь мы ограничиваемся сообщением результатов нашего исследования влияния ультрафиолетовых излучений на некоторые катализаторы процесса разложения перекиси водорода в водном растворе.

Еще в 1922 г. Р. Шварц[2] обнаружил влияние как предварительного облучения рентгеновскими лучами на каталитическую активность платины по отношению к растворам H_2O_2, так и облучения во время хода катализа. Катализолем платины значительно замедляется действием рентгеновских лучей. Затем, с течением времени, каталитическая активность постепенно восстанавливается.

1 Украинский химич. журн., т. I (1925), стр. 1, и ЖРФХО, LXI (1929), стр. 1611.

2 R. Schwarz, W. Friedrich u. H. Wannerlich. Ber. d. Ch. Ges., 55 (1922) 1040. — R. Schwarz u. M. Klingenfuss. Z. f. Elektr., 28 (1922), 472 и 29 (1923), 470. Краткий реферат на русском языке в книге: Р. Шварц. Успехи неорганической химии, перевод под ред. А. А. Гринберга, Гос. Научно-техн. изд-во, Л. 1931, стр. 176.

Каталитическая активность энзима каталазы понижается под влиянием рентгеновских лучей.

С другой стороны, платинированный асбест под влиянием предварительного освещения рентгеновским излучением становится более активным по отношению к процессу $2SO_2 + O_2 \rightarrow 2SO_3$ и дает лучший выход SO_3.

Нами также наблюдалось влияние предварительного облучения на каталитическую активность катализатора и установлено влияние на нее облучения во время хода катализа и более сильное каталитическое действие комбинации катализатора с излучением по сравнению с действием одного катализатора.[1]

Экспериментальная часть

Нами изучены в этом направлении: графит (графитовые пластинки), перекись свинца, отложенная на платиновой пластинке, и платина (гладкая и платинированная).

Катализаторы изготовлялись следующим образом:

1. PbO_2 осаждался электролитически на платиновой пластинке размером 60×24 мм из 1%-го раствора $Pb(NO_3)_2$, содержащего 10 см³ HNO_3 на 1000 см³ воды. Для получения плотно держащегося слоя осаждение производилось в течение 48 часов током силою в 0.25 mA. Полученной таким образом пластинки хватило на 2—3 опыта, после чего активность ее падала. Тогда слой PbO_2 смывался горячей смесью 4 объемов 2N щавелевой и 1 объема концентрированной азотной кислот, затем хромовой смесью, пластинка десятикратно промывалась дестиллированной водой и подвергалась накладыванию слоя заново.

2. Pt платинировалась 3%-ым, не содержащим ацетата свинца, раствором хлорной платины. Первый раз — 30 мин., а повторно — 3 мин. при силе тока 150 mA.

Каталитическая активность полученных таким образом катализаторов вначале сильно растет во время опытов, а потому прежде всего устанавливалось постоянство каталитического действия выдерживанием катализатора в растворе H_2O_2 от 2 до 3 часов.

Количество разложившейся H_2O_2 определялось по разности кубиков перманганата, уходивших на титрование 3 см³ раствора H_2O_2 до катализа и после него. Раствор перманганата употреблялся 0.07N, один кубик его соответствует 0.00133 г H_2O_2, раствор H_2O_2 — 0.425%.

[1] В день отправки нашей статьи (из Тифлиса) в Известия Акад. Наук получена книжка «Журнала физической химии», где напечатана работа Я. К. Сыркина и И. Н. Годнева: «К вопросу о совместном действии излучения и катализатора». Авторы изучили «кинетику совместного действия золя платины и ультрафиолетового излучения на реакцию распада перекиси водорода в растворе при 19.5, 29 и 38°» и нашли «что константа скорости распада при совместном действии равна сумме констант обеих отдельных реакций», а также, «что предварительное освещение золя не влияет на его последующее действие» (Ж. физ. химии, т. V, вып. 1, 1934, стр. 52).

Опыт производился следующим образом: катализатор помещался на дно плоско-параллельного запарафинированного жестяного сосуда, площадь и форма дна которого равнялась площади и форме пластинки катализатора, и быстро вливались 10 см³ раствора H_2O_2. По прошествии 20 мин. (время отсчитывалось по секундомеру) из сосуда отбиралась проба в 3 см³ и титровалась перманганатом из микробюретки (ошибка титрования 0.02 см³). Если два последние опыта давали расхождения в числе кубиков перманганата не больше 0.02—0.03, то постоянство считалось достигнутым и после этого приступали к комбинированному действию катализатора и излучения.

Пример изменения активности свежеприготовленного PbO_2:

Пластинка выдержана под H_2O_2 2 часа. На титрование 3 см³ H_2O_2 до катализа ушло 10.42 см³ $KMnO_4$. После 20-минутного катализа

1) на 3 см³ H_2O_2 ушло $KMnO_4$ — 3.35 см³,
2) „ „ „ „ „ — 3.21 „
3) „ „ „ „ „ — 2.94 „
4) „ „ „ „ „ — 2.93 „

Разность между числом кубиков, ушедших на титрование 3 см³ H_2O_2 до катализа и после него (10.42 — 2.93 = 7.49) соответствует количеству разложившейся H_2O_2 и определяет активность катализатора. В таблицах эта разность обозначается буквою K_1.

К находящейся в сосуде пластинке с установленной, таким образом, постоянной каталитической активностью быстро приливалось 10 см³ H_2O и пластинка подвергалась освещению (сквозь слой раствора) кварцевой лампы фирмы Hereus Hanau, рас. на 120 вольт. Чтобы исключить действие ультрафиолетовых лучей на H_2O_2, рядом с сосудом с катализатором ставился такой же точно сосуд без катализатора, в котором освещалась чистая H_2O_2 (тоже 10 см³). Лампа помещалась над сосудами, а для полного обеспечения равномерности освещения обоих сосудов столик, на котором они стояли, вращался со скоростью, в среднем, 7 оборотов в минуту.

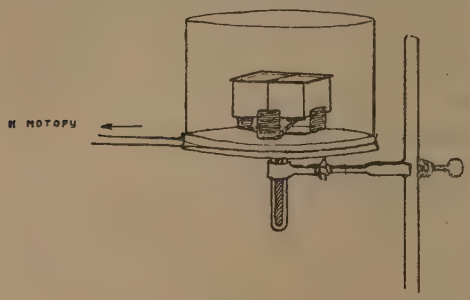
Через 20 мин. определялось количество разложившейся H_2O_2 в сосуде с катализатором (K_τ) и в сосуде без катализатора (R), из первого вычиталось второе и, таким образом, определяли ($K_\tau - R$), т. е. активность комбинации катализатора с излучением.

Наблюденное таким образом ($K_\tau - R$) всегда оказывалось большим для PbO_2, Pt гладкой и графита и меньшим K_1 для Pt платинированной, но так как при освещении температура поднималась на 5° (17—22°) и благодаря действию вентилятора, поставленного для охлаждения лампы, происходило заметное испарение воды (около 4%), то условия опытов были изменены следующим образом.

Оба сосуда помещались в термостат, укрепленный на вращающемся столике, и закрывались кварцевой пластинкой. Посредством двух сифонов вода в термо-

стате беспрерывно менялась, чем устранялось изменение температуры. В этих условиях она оставалась постоянной, равной комнатной. Температура катализируемого раствора в течение опыта также оставалась постоянной, равной комнатной температуре. Покрышка из кварцевых стекол устраняла испаряемость.

В опытах же без термостата (с открытыми сосудами) охлаждающий лампу вентилятор служил также для понижения температуры катализируемых растворов, которые при этом условии не нагревались больше, чем на 5° (от 17 до 22°) при освещении в течение 20 мин.



Фиг. 1.

В части опытов кварцевая крышка заменялась пластинкой оконного стекла для отфильтровывания волн более коротких, чем $\lambda = 3650$ Å.

Толщина слоя раствора перекиси водорода над катализатором была равна в опытах в термостате 7 мм, в опытах без термостата 6 мм и в опытах с графитом 5 мм.

Мы рассчитали, что при такой толщине слоев получается приведенное в нижеследующей таблице поглощение квантов различной длины волн кварцевой лампы раствором перекиси водорода.[1]

Таблица 1

λ	hν	i	Доходит до катализатора. Толщина слоя раствора		
			5 мм	6 мм	7 мм
2540 Å	112 бол. кал.	10	0.28	0.14	0.07
2650 »	107 » »	5	0.85	0.60	0.41
2800 »	101 » »	4	2.04	1.80	1.55
2890 »	98.3 » »	5	3.44	3.20	3.00
3030 »	93.7 » »	4	3.45	3.33	3.25
3130 »	90.7 » »	8	7.48	7.40	7.27
3650 »	77.8 » »	10	10	9.99	9.98
		46	27.52	26.46	25.53

Таким образом, при слое раствора H_2O_2 в 0.5 см интенсивность дошедших до катализатора лучей $\lambda = 2540$ Å равна всего 2.8%, падающих на поверхность раствора, интенсивность дошедших лучей $\lambda = 3650$ Å равна 100% падающих.

[1] Расчет сделан по данным Allmand и Style, Journal of the Chemical Society, april 1930, стр. 596.

Общая интенсивность излучения, дошедшего до катализатора, равна 59.8% интенсивности падающего на поверхность раствора излучения.

В дошедшем до катализатора излучении наибольший процент падает на интенсивность лучей, кванты которых не выбивают электронов из платины ($h\nu < 100$ б. кал.), именно 88.5%, и только 11.5% приходится на интенсивность коротковолных излучений с квантами, большими 100 б. кал., причем на $\lambda = 2540$ Å ($h\nu = 112$) приходится всего один процент.

Для толщины слоя в 0.6 см соответствующие величины равны: 1.4%; 99.9%; 57.5%; 90.4% и 0.5% и для слоя в 0.7 см: 0.7%; 99.8%; 55.5%; 92% и 0.3%.

Результаты опытов сопоставлены в помещенных далее таблицах.

Опыты с перекисью свинца — Таблица 2

Активность до освещения	Активность после освещения	%-ое увеличение активности
I. Пластинка освещалась под слоем воды в 6 мм 20 мин.		
4.70	После I-го освещения—7.14	51.91%
	» II-го » —8.53	81.49
	» III-го » —7.36	56.59
	» IV-го » —6.93	47.44
II. (Новый слой PbO_2) Пластинка освещалась под водой 11 мин.		
4.14	После I-го освещения—4.17	0.72%
	» II-го » —5.87	41.78
	» III-го » —6.75	63.06
	» IV-го » —7.00	69.08
III. (Новый слой PbO_2) Пластинка освещалась под водой 11 мин.		
4.19	После I-го освещения—6.32	50.84%
	» II-го » —7.15	70.64
	» III-го » —6.65	58.71
	» IV-го » —5.15	34.84
IV. (Новый слой PbO_2) Пластинка освещалась под водой 2 мин.		
3.27	После I-го освещения—4.20	28.44%
	» II-го » —5.30	62.04
	» III-го » —6.87	110.03
	» IV-го » —6.76	106.42
	» V-го » —6.66	103.67
	» VI-го » —6.47	97.85

Влияние предварительного облучения на каталитическую активность катализатора

Каталитическая активность катализатора выражена здесь (и дальше) в кубических сантиметрах перманганата, отвечающих разложенному в течение 20 мин. количеству перекиси водорода.

Величину эту обозначим буквой K.

Данные таблицы указывают на то, что предварительное облучение под слоем воды (той же толщины, что и в опытах катализа слой раствора перекиси водорода) значительно увеличивает каталитическую активность PbO_2.

Повторное предварительное облучение только в одной серии опытов давало все время увеличение. В трех же остальных сериях получилось увеличение и затем уменьшение, — переход через максимум. Вероятно и во второй серии при дальнейшем повторном облучении также получился бы максимум. Отношение максимума к первоначальной K равно в среднем 1.8.

Наблюдалось также влияние предварительного облучения на каталитическую активность платины.

Быть может значительную роль играет здесь нагревание во время облучения, хотя вода над катализатором нагревалась не более, чем на 5° (17—23°).

Детальное изучение этого явления, с учетом всех его сопровождающих условий, составляет предмет отдельного исследования, которым занята Р. Корабельник. До окончания этого исследования нельзя, конечно, дать удовлетворительное объяснение явлению изменения каталитической активности катализатора при предварительном его облучении.

Переходим теперь к опытам изучения изменений каталитической активности катализатора, освещаемого во время его работы.

Когда (в течение 20 мин.) мы освещаем катализатор сквозь слой раствора перекиси водорода, то происходит каталитическое разложение последней освещаемым катализатором и фотохимическое ее разложение лучами, пронизывающими ее слой.

Количество разложенной за 20 мин. этими обоими факторами перекиси водорода, выраженное в кубических сантиметрах перманганата, обозначим через K_r.

K_r это — каталитическая активность освещаемого катализатора плюс фотохимическая активность излучения. Последнюю обозначим через R.

Вычитая из K_r, определенную в параллельном опыте R, мы получим $(K_r - R)$, — каталитическую активность освещаемого катализатора.

Следует здесь же отметить, что мы получаем при таком вычитании величину, меньшую истинной каталитической активности освещаемого катализатора.

В самом деле, предположим, что действие некоторого катализатора не изменяется при освещении, что, следовательно, действия K и R складываются.

Тогда сумма $(K+R)$ всегда будет больше K_r. Действию R, освещающему катализатор сквозь раствор H_2O_2, в каждый данный момент подвергается раствор H_2O_2, более разбавленный, чем в параллельном опыте действия одних лучей, так как одновременно с излучением работает и катализатор.

Поэтому вычитать из K_r надо было бы не R, но некоторое $R_1 < R$.

Значит, если действия излучений, освещающих катализатор, и катализатора лишь аддитивно складываются, то $(K+R) > (K+R_1)$, т. е. $> K_r$.

И когда мы вычитаем определенную в параллельном опыте R из K_r, то получаемая величина каталитической активности освещаемого катализатора всегда будет меньше истинной.

Если же $(K+R) = K_r$, то у нас налицо усиление действия катализатора под влиянием освещения. Тем более, если $(K+R) > K_r$.

При активном катализаторе истинная R может быть настолько меньше наблюдаемой в параллельном опыте, что при вычитании $K_r - R$, — каталитическая активность освещаемого катализатора получится меньшей, чем самого отдельно работающего катализатора.

В нижеследующих таблицах сопоставлены результаты изучения влияния излучений на работающий катализатор.

Кроме указанных выше обозначений, мы встретимся в этих таблицах еще со следующими: $\frac{K_r - R}{K_1}$. Так мы обозначаем отношение, показывающее во сколько раз каталитическая активность освещаемого катализатора больше или меньше каталитической активности самого катализатора.

Нередки случаи, когда каталитическая активность катализатора после опыта его работы под освещением оказывается большей, чем первоначальная. Обозначим последнюю K_1 и первую K_2.

Тогда $\frac{K_r - R - K_2}{K_1} \cdot 100$ дает нам процентное увеличение активности катализатора, зависящее от комбинированного действия излучений и катализатора.

$\frac{K_r - R - K_1}{K_1} \cdot 100$ дает нам процентное увеличение активности катализатора, зависящее от вызванного освещением увеличения его каталитической активности на $K_2 - K_1$ и от комбинированного действия излучений и катализатора (с активностью K_2).

В указанных выше направлениях нами изучены: графит, перекись свинца, электролитически отложенная на платиновой пластинке, и платина (гладкая и платинированная).

Освещение во время опытов производилось сквозь кварцевую пластинку, закрывающую сосуды, в которых велись опыты, или вовсе без пластинки и сквозь оконное стекло.

В последнем случае отфильтровывались все λ, больше 3650 Å (Вейгерт), т. е. действующее на катализатор излучение ($h\nu = 78$ б. кал.), проходя через слой раствора, им не поглощалось и не давало фотохимического разложения H_2O_2.

Влияние излучений на каталитическую активность графита

Таблица 3

Сквозь оконное стекло						Сквозь кварцевое стекло					
K_1	K_r	R	K_2	$\frac{K_r-R}{K_1}$	$\frac{K_r-R}{K_2}$	K_2	K_r	R	K_3	$\frac{K_r-R}{K_2}$	$\frac{K_r-R}{K_3}$
0.75	1.31	—	0.82	1.7	1.6	0.82	8.77	0.66	1.04	9.9	7.8
1.04	1.35	0.00	1.00	1.3	1.4	1.00	9.09	0.76	1.69	8.3	4.9
1.67	2.33	0.03	1.87	1.4	1.2	1.87	8.91	0.67	2.33	4.4	3.5
2.33	2.66	0.00	2.20	1.1	1.2	2.20	9.01	0.57	2.78	3.8	3.0

Опыты табл. 3 производились без термостата. Катализируемый раствор нагревался не более, чем на 5° (в средн. от 17 до 22°).

Между тем, произведенные еще в Тифлисе в 1931 г. опыты действия температуры на каталитическую активность графита показали, что при нагревании на 20° каталитическая активность его увеличивается в 1.7 раза.

Поэтому, приведенные в таблице данные освещения сквозь кварцевое стекло определенно указывают на очень большое увеличение каталитической активности освещаемого катализатора по отношению к первоначальной его активности.

Данные таблицы также указывают на увеличение самой каталитической активности катализатора (K_2 и K_3) под влиянием освещения.

Графитовую пластинку мы не очищали кипячением с кислотой. В золе ее найдены тяжелые металлы (Fe и Cu).

Приводим еще произведенные в Тифлисском Химическом институте опыты М. Тархановой (в 1931 г.). Опыты производились с 3% H_2O_2 в кварцевых пробирках. Результаты исследования будут опубликованы.

Графитовые пластинки кипятились повторно в соляной кислоте до исчезновения реакции на железо.

Таблица 4

Расстояние от лампы	K	K_r	R	$\frac{K_r-R}{K}$
5 см	0.5 ($t = 55°$)	6.75 (19—56°)	2.67 (13—45°)	8.2
10 »	0.3 ($t = 35°$)	2.35 (17—35°)	0.66 (12—24°)	5.6
15 »	0.3 ($t = 35°$)	1.31 (17—28°)	0.43 (12—18°)	2.9

Влияние температуры здесь элиминировано тем, что каталитическая активность самого катализатора определялась при наивысшей температуре, до какой к концу опыта с освещением (20 мин.) нагревался катализируемый раствор.

И эти опыты дают очень большое увеличение каталитической активности освещаемого катализатора по сравнению с неосвещаемым.

Для полноты картины приведем еще данные М. Тархановой для угольной пластинки.

Таблица 5

Расстояние от лампы	K	K_r	R	$\frac{K_r-R}{K}$
5 см	0.5 ($t=55°$)	5.84 (19—56°)	2.67 (13—45°)	6.3
10 »	0.3 ($t=35°$)	1.87 (17—35°)	0.66 (12—24°)	4
15 »	0.3 ($t=35°$)	1.25 (17—24°)	0.43 (12—18°)	2.7

Каталитическая активность освещаемого угля также в несколько раз больше активности неосвещаемого.

Сравнение данных табл. 4 и 5 показывает, что освещение графита вызывает более сильное увеличение его каталитической активности, чем это наблюдается при угле.

Если считать, что действие освещения состоит в облегчении выхода электронов из катализатора, то, очевидно, под слоем раствора графит легче выделяет электроны, чем уголь.

При обычных условиях разница невелика: работа вырывания электронов из графита около 109 б. кал., из угля — около 111 б. кал.

Для проверки полученных данных были произведены с графитом опыты в термостате.

Таблица 6

Катализ освещаемым графитом (в термостате)

	№ опыта	K_1	K_r	R	K_2	$\frac{K_r-R-K_1}{K_1}\cdot 100$	$\frac{K_r-R-K_2}{K_2}\cdot 100$
A	1	0.60	2.16	1.40	0.59	26.6%	28.81%
	2	0.71	2.81	0.95	0.76	162.1	182.21
	3	0.82	2.88	0.96	0.86	134.1	120.50
B	4	3.29	6.32	1.37	3.35	80.8	77.6
	5	3.36	6.17	0.66	3.10	63.9	77.7
	6	3.10	7.69	1.81	3.39	89.6	73.4
	7	3.35	7.77	1.60	3.38	84.1	82.5

Пластинка графита группы опытов В (4, 5, 6 и 7-й) долго находилась (до опытов) в растворе H_2O_2.

Опыты в термостате вполне подтверждают результаты опытов без термостата. Цифры пятого столбца этой таблицы дают процентное увеличение первоначальной каталитической активности графита, вызываемое увеличением его каталитической активности под влиянием освещения и действием его освещаемой поверхности, — комбинированным действием его поверхности и ударяющих в нее квантов излучения.

Цифры шестого столбца дают процентное увеличение одним комбинированным действием поверхности катализатора и ударяющих в нее квантов излучения.

Сама каталитическая активность катализатора сравнительно мало изменяется под влиянием освещения, как и в опытах без термостата.

В результате опытов с графитом (а также с углем) установлено очень значительное увеличение каталитической активности освещаемого катализатора по сравнению с активностью неосвещаемого, причем сама каталитическая активность изменяется сравнительно незначительно.

Значительное же увеличение (доходящее до 182% в опытах в термостате) приходится на долю комбинированного каталитического действия освещаемой поверхности катализатора и ударяющих в нее (и в адсорбированные ею молекулы, атомы и ионы) квантов излучения.

Влияние освещения на каталитическую активность перекиси свинца

Ориентировочные опыты ставились без термостата. Раствор над катализатором нагревался в течение 20 мин. не более, чем на 5° (17—22°).

Таблица 7

Освещение сквозь оконное стекло				Освещение без стекла		
K_1	K_r	R	$\frac{K_r-R}{K_1}$	K_r	R	$\frac{K_r-R}{K_1}$
3.53	7.43	0.06	2.09	8.38	0.73	2.2
3.53	7.56	0.00	2.13	—	—	—
3.09	6.35	0.00	2.05	—	—	—
3.09	6.34	0.00	2.05	8.19	0.44	2.5
5.87	8.07	0.00	1.37	—	—	—
6.19	8.35	0.00	1.34	—	—	—
6.19	8.56	0.00	1.38	—	—	—

Таблица 8

Освещение сквозь оконное стекло						Освещение без стекла					
K_1	K_r	R	K_2	$\frac{K_r-R}{K_1}$	$\frac{K_r-R}{K_2}$	K_2	K_r	R	K_3	$\frac{K_r-R}{K_2}$	$\frac{K_r-R}{K_3}$
4.21	5.34	0.00	4.20	1.3	1.3	4.20	7.17	0.95	3.79	1.5	1.6
3.55	5.73	0.02	3.80	1.6	1.5	3.80	7.84	0.88	4.02	1.8	1.7
3.43	5.95	0.00	3.88	1.7	1.5	3.88	8.30	1.05	5.00	1.9	1.5
4.56	7.02	0.03	5.66	1.5	1.2	5.66	8.63	0.97	5.82	1.4	1.3
4.62	6.74	0.00	5.80	1.5	1.2	5.80	8.33	0.99	6.73	1.2	1.1
5.13	7.69	0.00	5.89	1.5	1.3	5.89	8.91	0.79	6.28	1.4	1.3
5.46	7.07	0.02	5.61	1.3	1.3	5.61	8.65	0.96	5.78	1.4	1.3
				1.5	1.3					1.5	1.4

Повышение температуры также увеличивает каталитическую активность PbO_2. При нагревании на 5° (17—22°) получается в 1.17 раз большая активность (среднее из 17 пар опытов).

Данные же табл. 7 и 8 дают увеличение в среднем в 1.6 раза.

Следовательно, небольшое (по сравнению с графитом и углем) увеличение каталитической активности освещаемого катализатора наблюдается и здесь.

Опыты (14 пар), произведенные С. Н. Чрелашвили в лаборатории Тифлисского Химического института (и еще не опубликованные), приводят к тем же результатам.

Для выяснения количественной стороны явления были поставлены опыты в термостате.

Результаты их сопоставлены в табл. 9 и 10.

80% опытов, приведенных в этих двух таблицах, дают увеличение каталитической активности освещаемого катализатора по сравнению с неосвещаемым (5-й столбец таблицы) в некоторых случаях на 76%, 42%, 35%, в среднем на 20.3%.

Для графита среднее увеличение (из опытов в термостате) — на 91.6% и наибольшее на 162%.

Первоначальная каталитическая активность графита в опытах табл. 6 (А) равна в среднем 0.71; увеличение в среднем на 108% и 6-й (В): 3.27 и 79.6%. Чем больше первоначальная каталитическая активность (в среднем), тем меньше (в среднем) ее увеличение.

Средняя (из дающих увеличение опытов табл. 9 и 10) первоначальная каталитическая активность PbO_2 равна 4.7. Она больше, чем даже у графита табл. 6 и увеличение ее меньше.

Освещение сквозь кварцевое стекло

Таблица 9

K_1	K_r	R	K_2	$\frac{K_r - R - K_1}{K_1} \cdot 100$	$\frac{K_r - R - K_2}{K_2} \cdot 100$
5.59	6.32	0.95	5.30	— 3.93%	+ 1.32%
5.30	6.30	1.00	5.98	0	—11.3
5.88	7.58	1.02	5.57	+11.56	+17.77
5.15	5.80	1.27	5.03	—12.03	— 9.94
5.09	5.79	1.07	4.64	—19.64	— 1.77
4.97	5.91	0.95	4.90	— 0.20	+ 1.22
5.08	6.47	0.73	4.84	+13.00	+ 1.85
2.75	4.64	0.72	3.72	+33.79	+ 5.25
4.13	6.47	0.51	4.19	+41.99	+41.95
4.86	5.66	0.56	4.72	+ 4.93	+ 8.05
2.37	4.91	0.70	3.82	+76.37	+10.21
3.64	5.63	0.69	4.37	+35.71	+13.04
4.37	5.73	0.75	3.98	+13.96	+25.23
4.80	6.72	0.70	4.63	—25.42	+30.02
4.20	5.72	0.52	4.17	+23.81	+27.10
6.14	7.00	0.52	6.32	+ 5.54	+ 2.53
4.92	5.53	0.47	4.59	+ 2.84	+10.24
5.00	5.99	0.42	4.97	+13.04	+12.07
4.99	5.80	0.32	5.50	+ 9.82	— 0.36
3.63	4.89	0.34	4.21	+25.34	+ 8.07
7.88	8.29	0.70	7.10	— 3.70	— 4.08

Освещение сквозь оконное стекло

Таблица 10

K_1	K_r	R	K_2	$\frac{K_r - R - K_1}{K_1} \cdot 100$	$\frac{K_r - R - K_2}{K_2} \cdot 100$
4.72	5.98	0.0	5.65	26.69%	5.84%
5.63	5.81	0.0	5.60	3.10	3.75
5.74	6.66	0.02	6.07	15.68	10.32
6.01	6.84	0.00	6.44	13.91	6.21
4.83	5.57	0.00	5.22	13.28	5.32
5.20	6.01	0.00	5.44	15.58	10.54

Что касается нескольких опытов с уменьшением каталитической активности (где минус при цифрах 5-го и 6-го столбцов табл. 9), то, вероятно, это зависит, как выше было выяснено, от отсутствия в этих случаях действия излучений на катализатор.

Шестой столбец таблицы дает изменение в процентах, происходящее только от каталитического действия поверхности катализатора, бомбардируемого квантами падающего излучения.

Здесь также 81.5% опытов дают увеличение в среднем на 11.7%.

Тогда как вся каталитическая активность освещаемого катализатора в среднем на 20.3% больше активности неосвещаемого.

В эту последнюю величину входит и увеличение самой каталитической активности, наблюдаемое в большинстве опытов (ср. величины K_1 и K_2).

Увеличение наблюдается и при освещении сквозь оконное стекло, отфильтровывающее λ, меньшие 3650 Å ($h\nu = 78$ б. кал.). Тут ни разу не наблюдается уменьшения, ибо не приходится вычитать R.

Нашими опытами установлено (хотя и незначительное по сравнению с графитом) увеличение каталитической активности освещаемой перекиси свинца по сравнению с активностью неосвещаемой.

Большая часть увеличения и здесь приходится на долю комбинированного каталитического действия освещаемой поверхности катализатора и ударяющих в нее (и в адсорбированные ею молекулы, атомы и ионы) квантов излучения.

Влияние освещения на каталитическую активность платины

Опыты производились в термостате. В табл. 11 и 12 сопоставлены результаты опытов с платинированной платиновой пластинкой. В табл. 11 опыты освещения старой, слабо действующей лампой, в табл. 12 — новой лампой.

Таблица 11

K_1	K_r	R	K_2	$\frac{K_r - R - K_1}{K_1} \cdot 100$	$\frac{K_r - R - K_2}{K_2} \cdot 100$
7.49	8.06	0.66	7.54	—1.23%	— 1.85%
7.13	7.60	0.42	7.14	+0.70	+ 0.56
6.84	7.56	1.20	7.15	—7.017	—11.05
7.13	7.64	0.79	7.17	—3.93	— 4.46
7.20	7.50	0.92	7.18	—8.61	— 8.35
6.53	6.88	0.47	6.57	—1.84	— 2.43
5.54	6.99	0.69	5.89	+1.40	+ 6.96
8.32	8.41	0.92	8.24	—9.98	— 9.13
8.80	9.32	0.51	8.70	+0.11	+ 1.26
8.22	8.72	0.50	8.29	—0.97	— 1.81
7.58	8.19	0.45	7.83	+2.11	— 1.15
8.24	8.20	0.50	7.90	—4.21	— 2.54
7.72	7.95	0.45	7.55	—2.85	— 0.66

Данные опытов дают как будто уменьшение каталитической активности освещаемого катализатора. Первоначальная каталитическая активность самой платины значительно больше (в среднем 7.5), чем перекиси свинца (в среднем 4.7).

Таблица 12

K_1	K_r	R	K_2	$\frac{K_r - R - K_1}{K_1} \cdot 100$	$\frac{K_r - R - K_2}{K_2} \cdot 100$
7.96	8.34	1.20	7.90	—10.31%	—9.84%
7.91	8.30	1.00	7.90	— 7.72	—7.59
8.01	8.25	0.91	8.03	— 8.36	—8.59
7.54	8.25	0.86	7.54	— 1.99	—1.99
7.30	7.68	1.05	7.31	—10.55	—9.30
7.30	7.84	1.08	7.17	— 4.67	—5.72
7.28	7.80	1.05	7.24	— 7.28	—6.78

Выше было объяснено, что в случае очень активного катализатора истинная R значительно меньше определяемой в параллельном опыте. Поэтому при вычитании последней из K_r может получиться кажущееся уменьшение активности. Если это так, то при освещении через оконное стекло, когда R равно нулю, должно получиться увеличение. Опыты, приведенные в табл. 13, это подтверждают.

Освещение сквозь оконное стекло

Таблица 13

K_1	K_r	R	K_2	$\frac{K_r - R - K_1}{K_1} \cdot 100$	$\frac{K_r - R - K_2}{K_2} \cdot 100$
9.45	9.62	0.00	9.34	1.69%	2.89%
9.41	9.59	0.00	9.39	1.89	2.13
7.35	7.91	0.00	7.48	7.62	5.44
7.45	7.96	0.00	7.46	6.85	6.70
7.69	8.34	0.00	8.07	8.52	3.35
7.70	8.36	0.00	8.04	8.44	3.98

При освещении через оконное стекло получается увеличение, хотя и очень небольшое.

Увеличения можно ожидать и для слабо платинированной платины, обладающей меньшей каталитической активностью. Опыт подтверждает это (табл. 14).

Таблица 14

K_1	K_r	R	K_2	$\frac{K_r - R - K_1}{K_1} \cdot 100$	$\frac{K_r - R - K_2}{K_2} \cdot 100$
6.24	8.03	0.99	6.67	12.82%	5.55%
4.97	6.68	0.84	5.52	17.50	5.79
4.46	5.51	0.56	4.51	11.24	9.75
4.50	5.53	0.54	4.51	11.43	10.89
4.56	5.60	0.56	4.60	8.31	9.56

Всюду при слабо платинированной платине получается увеличение. В среднем $\frac{K_r - R - K_1}{K_1} \cdot 100 = +12.2\%$, $\frac{K_r - R - K_2}{K_2} \cdot 100 = 8.3\%$ при первоначальной каталитической активности 5.0, немного большей кат. активности PbO_2, — 4.7, для которой: $\frac{K_r - R - K_1}{K_1} \cdot 100 = +20.3\%$ и $\frac{K_r - R - K_2}{K_2} \cdot 100 = +11.7\%$.

Следовательно, для платины наблюдается еще меньшее увеличение, чем для PbO_2.

Платинированная платина, обладающая большей каталитической активностью, должна при кратковременном освещении дать также эффект увеличения активности, ибо здесь истинная R мало будет отличаться от наблюдаемой в параллельном опыте (табл. 15).

Таблица 15

Время освещения в мин.	K_1	K_r	R	K_2	$\frac{K_r - R - K_1}{K_1} \cdot 100$	$\frac{K_r - R - K_2}{K_2} \cdot 100$
2	3.62	3.79	0.05	3.62	+ 3.33%	+ 3.33%
5	6.08	6.46	0.12	6.10	+ 4.27	+ 3.94
10	7.99	8.26	0.24	7.91	+ 0.37	+ 1.39
20	9.24	9.49	0.44	9.41	— 2.16	— 3.82
2	2.95	3.19	0.06	2.85	+ 6.10	+ 9.82
5	5.08	6.05	0.12	5.04	+16.73	+17.66
10	7.18	7.49	0.23	7.21	0.0	0.0
20	8.46	8.82	0.40	8.52	— 0.47	— 1.20

При освещении в течение 2, 5 и 10 минут получается увеличение активности и только при 20-минутном освещении получается уменьшение.

Первоначальная кат. активность высока: 9.24 и 8.46 при 20-минутном действии.

Удалось получить увеличение и при опытах с гладкой платиной, обладающей очень слабой каталитической активностью (табл. 16).

Таблица 16

K_1	K_r	R	K_2	$\frac{K_r - R - K_1}{K_1} \cdot 100$	$\frac{K_r - R - K_2}{K_2} \cdot 100$
0.90	1.61	0.67	1.03	+ 4.45%	— 8.73%
0.97	1.66	0.67	1.10	+ 2.01	—10.0
1.12	1.68	0.68	1.37	—10.70	—27
0.46	1.23	0.66	0.52	+23.91	+ 5.77
0.53	1.11	0.56	0.60	+ 3.77	— 8.33
0.58	1.28	0.67	0.56	+ 5.17	+ 8 93
0.56	1.26	0.68	0.58	+ 3.57	0.00

При очень слабой каталитической активности гладкой платины наблюдается очень малое ее увеличение и притом $\frac{K_r - R - K_2}{K_2} \cdot 100$ в большинстве случаев дает уменьшение. Возможно, что здесь уменьшение не только кажущееся, возможно, что при бомбардировке квантами излучений поверхности платины иногда создаются условия, замедляющие катализ.

В пользу этого говорит и приведенный выше факт меньшего увеличения активности платины по сравнению с увеличением такой же почти активности PbO_2.

Вопрос этот требует еще детального изучения.

При освещении: графита, угля, PbO_2 и не слишком активной платины наблюдается увеличение каталитической активности освещаемого катализатора по сравнению с активностью неосвещаемого.

Большая часть увеличений приходится здесь на долю комбинированного действия освещаемой поверхности катализатора и бомбардирующих ее (и адсорбированные ею молекулы, атомы и ионы) квантов излучения.

Сравнение графита, PbO_2 и активной платины показывает, что с увеличением каталитической активности катализатора увеличение ее при освещении становится меньше.

Это уменьшение может целиком или отчасти зависеть от того, что разница между «истинным» R и наблюдаемым в параллельном опыте должна увеличиваться с увеличением каталитической активности катализатора.

Опыты с гладкой и с мало активной платинированной платиной дают указание на возможность в некоторых случаях замедления катализа при действии излучений на катализирующую платину.

Увеличение каталитической активности освещаемого катализатора несомненно должно быть приписано явлению действия на катализируемую H_2O_2 электронов катализатора.

Из табл. 1 ясно, что даже при слое раствора H_2O_2 в 0.7 см до катализатора доходят все же, хотя и в небольшом количестве, кванты, способные вырвать электрон из платины, графита и угля и, вероятно, из PbO_2. Кванты остальных λ во всяком случае дают внутренний фотоэффект, увеличивают диссоциацию атомов катализатора на ионы и электроны и тем облегчают выход электронов на поверхность. Возможно, что под слоем жидкости вообще не происходит вырывания электронов, но лишь облегчение их выхода на поверхность. Значительное действие, наблюдаемое при освещении через оконное стекло, говорит нам, что кванты в 78 б. кал. производят эффект увеличения активности, хотя заведомо

не могут выбить электрон катализатора, но лишь, путем внутреннего фотоэффекта, облегчить ему выход на поверхность.

Выходящие на поверхность электроны должны вступать во взаимодействие [1] с молекулами H_2O_2.

$$H_2O_2\,aq + 2e \rightarrow 2OH' + 261 \text{ б. кал.}$$

Это — процесс типа: $A + BC + D \rightarrow AB + CD + Q$

$$e + HO - OH + e \rightarrow OHe + OHe + 261,$$

активация которого равна нулю и который, поэтому, легко должен итти сам по себе.[2] Если он идет на катализаторе, то надо прибавить еще теплоту адсорбции H_2O_2 и $2OH'$.

Если каталитический процесс идет без помощи излучений, то из теплового эффекта взаимодействия $H_2O_2\,aq$ с электронами надо вычесть работу их отрыва от катализатора.

Работа отрыва не под водой для платины около 100 б. кал.

Вычитая $100 \times 2 = 200$ и учитывая теплоту адсорбции ($+Q$), мы получим в остатке большой положительный тепловой эффект, а потому взаимодействие это должно легко итти и при катализе без действия излучений.

Но если в платине не будет пополняться убыль электронов, то процесс $H_2O_2\,aq + 2e \rightarrow 2OH'aq$ вскоре остановится.

Пополнение возможно только за счет отдачи другими молекулами перекиси водорода своих электронов платине:

$$H_2O_2 \rightarrow 2H^{\smile} + O_2 + 2e.$$

[1] Тепловой эффект процесса рассчитан сл. обр.:

$$H_2O_2\,aq \rightarrow H_2O_{2\,газ} + aq - 12$$
$$H_2O_{2\,газ} \rightarrow 2OH_{газ} - 48$$
$$2OH + 2e \rightarrow 2OH' + 94.5 \times 2$$
$$2OH' + aq \rightarrow 2OH'aq + 66 \times 2$$
$$\overline{H_2O_2\,aq + 2e \rightarrow 2OH'aq + 261}$$

Данные для этого расчета см. статью Л. Писаржевского в Известиях Акад. Наук СССР, 1933, стр. 571.

Теплота гидратации OH' вычислена следующим образом:

$$H^{\smile}\,aq \rightarrow H^{\smile}_{газ} + aq - 262$$
$$OH'aq \rightarrow OH'_{газ} + aq - Q$$
$$H^{\smile}_{газ} + OH'_{газ} \rightarrow H_2O_{газ} + 331.5$$
$$H_2O_{газ} \rightarrow H_2O_{жидк.} + 10.6$$
$$\overline{H^{\smile}\,aq + OH'aq \rightarrow H_2O_{жидк.} + 80 - Q}$$
$$80 - Q = 13.8 \text{ и } Q = 66$$

262 к. — теплота гидратации $H^{\smile}$ дана М. Борном. Остальные цифры расчета см. в указанной статье Г. Писаржевского.

[2] M. Polanyi. Z. f. Electroch., 35 (1929), стр. 562 и 564.

Таким образом, логическим выводом из наших опытов является теория В. Ройтера, по которой при катализе перекиси водорода платиной последний процесс идет на неактивных ее местах, первый же — на активных центрах, а далее $H^{\cdot}aq$ и $OH'aq$ ионы соединяются в молекулы воды.[1]

Окружающие платину, погруженную в раствор H_2O_2, сольваты ее ионов $Pt^{\cdot\cdot}aq$ играют здесь роль фактора, отнимающего электроны от молекул перекиси водорода:

$$H^{\cdot}_2(O_2)''aq + Pt^{\cdot\cdot}aq \rightarrow 2H^{\cdot}aq + O_2 + [Pt^{\cdot\cdot}2e].$$

При этом ионы платины садятся на пластинку платины — катализатора в виде атомов, а ионы $H^{\cdot}$ перекиси водорода переходят в раствор в виде сольватов $H^{\cdot}aq$.

На активных центрах платины, — ребрах, остриях... — скопляются подвижные отрицательные заряды, — свободные электроны платины. Здесь, поэтому, ионы платины не идут в раствор. На неактивных же местах ее поверхности (вследствие скопления электронов на активных центрах) образуется недостаток электронов, и здесь, поэтому, ионы платины легко (по сравнению с акт. центрами) идут в раствор в виде сольватов.

А потому здесь именно и идет процесс отдачи платине молекулами H_2O_2 их электронов. В платине образуется избыток электронов, что способствует выходу их на активных центрах, где и происходит процесс соединения их с атомами кислорода и образование в конечном счете $'O'H^{\cdot}aq$ — ионов.

Дальнейший процесс: $H^{\cdot}aq + OH'aq \rightarrow H_2O_{\text{жидк.}}$ ведет вновь к выходу на неактивных местах ионов платины в раствор, к отнятию ими вновь от новых молекул H_2O_2 их электронов, к выходу электронов с активных центров и образованию ими с H_2O_2 ионов $OH'aq$ и т. д.

Катализатор-платина играет здесь своеобразную роль передатчика электронов от молекул H_2O_2, находящихся на неактивных участках, молекулам H_2O_2, притянутым активными центрами. В самом катализаторе во время катализа идут потоки электронов от неактивных участков к активным центрам.

Кванты падающих на платину излучений увеличивают степень ее диссоциации на ионы и электроны, облегчают их выход на активных участках, усиливают их ток от неактивных к активным местам и тем ускоряют катализ.

Следует думать, что действие излучений, облегчающих выход электронов, распространяется почти исключительно на активные центры.

[1] В. А. Ройтер. Механизм катализа перекиси водорода платиной. Ж. физ. химии, т. IV, вып. 4 (1933), стр. 457.

Если катализатор мало активен, обладает малым числом активных центров, тогда под влиянием излучений электроны будут стремиться выходить и на неактивных участках, что будет мешать процессу: $H_2O_2 \rightarrow 2H^{\smile} + O_2 + 2e$ и этим замедлять катализ.

Поэтому для гладкой платины можно ожидать и уменьшения каталитической активности при освещении работающего катализатора, что мы и наблюдали.

С другой стороны, при очень активной платине большое количество активных центров выходящими с них под ударами квантов электронами будет ограждать затерянные среди них немногочисленные неактивные участки от взаимодействия с молекулами H_2O_2, — от процесса отдачи последними электронов платине и этим также замедлит катализ, что и дают наши опыты.

Во всяком случае, раз процесс катализа перекиси водорода платиной идет в двух стадиях, представляющих собою два прямо противоположных процесса, из которых один должен облегчаться действием излучений, а другой затрудняться, то при некоторых определенных условиях может получиться уменьшение каталитической активности платины при ее освещении во время катализа.

Однако, это надо еще доказать, поставив так опыты, чтобы элиминировать совсем необходимость параллельного опыта определения R.

Один из нас предполагает с этой целью произвести опыты освещения катализирующей платины, входящей в состав гальванического элемента.

$$Pt \left| \begin{matrix} H_2O_2 \\ H_2SO_4 \end{matrix} \right| \begin{matrix} H_2 \\ \end{matrix} \Bigg| Pt$$

Мы предполагаем, что механизм катализа H_2O_2 графитом, углем и PbO_2 тот же в общих чертах, что и платиной. Здесь только нет сольватов ионов вокруг катализатора, сильно облегчающих процесс отнятия электронов от $H_2^{\smile}(O_2)''$.

Поэтому графит, уголь и PbO_2 при прочих равных условиях должны быть менее активными катализаторами, чем платинированная платина.

А также и потому, что степень диссоциации на ионы и электроны у платины во много раз больше.

Результаты и выводы

1. Изучено действие ультрафиолетовых излучений на ход катализа разложения перекиси водорода в водном растворе и на каталитическую активность графита, перекиси свинца и платины (платинированной и гладкой), — катализаторов этого процесса.

2. Ориентировочные опыты указывают на увеличение каталитической активности перекиси свинца и платины при предварительном их освещении ультрафиолетовой частью спектра. Явление это детально изучается в нашей лаборатории.

3. Установлено очень значительное увеличение каталитической активности освещаемого (во время катализа) графита (а также угля) по сравнению с активностью неосвещаемого.

Для перекиси свинца также установлено увеличение, но гораздо меньшее, чем для графита, и еще меньшее для не слишком активной платинированной платины. Причем сама каталитическая активность катализатора изменяется сравнительно незначительно.

Значительное же сравнительно изменение, именно увеличение (доходящее у графита до 182%), приходится на долю комбинированного каталитического действия освещаемой поверхности катализатора и бомбардирующих ее (и адсорбированные ею молекулы, атомы и ионы) квантов излучения.

4. Опыты с гладкой и слабо активной платинированной платиной дают указание на возможность в некоторых случаях замедления катализа при действии излучений на катализирующую платину.

5. Результаты нашего исследования приводят к данному впервые В. Ройтером механизму катализа перекиси водорода платиной.

6. Катализатор-платина играет своеобразную роль передатчика электронов от молекул H_2O_2, находящихся на неактивных участках, молекулам H_2O_2, притянутым активными центрами. В самой платине во время катализа идут потоки электронов от неактивных участков к активным центрам.

7. Указанный механизм катализа приводит к выводу, что при малоактивном, равно как и при очень активном катализаторе действие излучений может затруднять процесс отдачи электронов молекулами H_2O_2 платине и тем замедлять ход катализа. Для решения этого вопроса ставятся специальные опыты.

Исследование продолжается.

Украинский Институт физической химии
Днепропетровск
2 февраля 1934 г.

L. PISSARJEWSKY, R. KORABELNIK und E. RYNSKAJA. DIE KOMBINIERTE WIRKUNG DER STRAHLUNG UND DES KATALYSATORS. I. DER EINFLUSS DES ULTRAVIOLETTEN LICHTE SAUF DIE KATALYTISCHE AKTIVITÄT DES KATALYSATORS BEI DER KATALYSE DES WASSERSTOFFPEROXYDS IN WÄSSERIGER LÖSUNG

ZUSAMMENFASSUNG

Es wurde dieWirkung ultravioletten Lichtes auf den Gang der Katalyse der Zersetzung von Wasserstoffperoxyd in wässeriger Lösung und auf die katalytische Aktivität von Graphit, Bleiperoxyd und Platin (platiniert und glatt) — der Katalysatoren dieses Prozesses — untersucht.

Die Vorversuche weisen auf eine Vergrösserung der katalytischen Aktivität des Bleiperoxyds und des Platins bei vorhergehender Bestrahlung derselben mit dem ultravioletten Teil des Spektrums hin. Diese Erscheinung wird in unserem Laboratorium ausführlich untersucht.

Es wurde eine bedeutende Vergrösserung der katalytischen Aktivität des (während der Katalyse) bestrahlten, im Vergleich zur Aktivität unbestrahlten Graphits (sowie auch von Kohle) festgestellt.

Auch für Bleiperoxyd wurde eine Vergrösserung, aber eine wesentlich kleinere als für Graphit, und eine noch kleinere für das nicht besonders aktive platinierte Platin festgestellt.

Wobei sich die katalytische Aktivität des Katalysators selbst verhältnissmässig wenig verändert.

Eine verhältnissmässig bedeutende Veränderung und zwar Vergrösserung (die bei Graphit 182% erreicht) ist auf die kombinierte Wirkung der beleuchteten Oberfläche des Katalysators und der sie (und die durch sie absorbierten Moleküle, Atome und Ionen) bombardierenden Quanten der Strahlung zurückzuführen.

Die Versuche mit glattem und schwach aktiviertem platinierten Platin geben einen Hinweis auf die Möglichkeit in einigen Fällen eine Verzögerung der Katalyse bei der Einwirkung der Ausstrahlung auf das katalysierende Platin zu erreichen.

Die Ergebnisse unserer Untersuchung führen zu dem, erstmals von W. Reuter gegebenen Mechanismus der Katalyse von Wasserstoffperoxyd mit Platin (Journ. d. physikal. Chemie, IV (1933), 457).

Der Katalysator-Platin spielt die eigenartige Rolle eines Elektronenüberträgers von Molekülen H_2O_2, die sich auf inaktivem Gebiet befinden, zu von aktiven Zentren angezogenen Molekülen H_2O_2. Im Platin selbst fliessen während der Katalyse Elektronenströme von inaktiven Gebieten zu aktiven Zentren.

Der angegebene Mechanismus der Katalyse führt zur Folgerung, dass sowohl bei wenig, als auch bei sehr stark aktivem Katalysator die Bestrahlungswirkung den Prozess der Abgabe von Elektronen durch die Moleküle H_2O_2 an das Platin erschweren kann und damit den Gang der Katalyse verzögert.

Zur Lösung dieser Frage sind besondere Versuche im Gange.

Die Untersuchung wird fortgesetzt.

2. Februar 1934.
Institut d. physikal. Chemie.
Dnepropetrowsk.

Оглавление — Sommaire

	стр.
Ю. В. Икорников. Обобщение понятия векторіального произведения на вектора m-мерного пространства и некоторые приложения этого обобщения (с резюме на франц. яз.)	777
***Б. Н. Делоне.** О пустом шаре. Памяти Г. Вороного (с резюме на русск. яз.)	793
А. И. Попов. О некоторых формулах суммирования (с резюме на немецк. яз.)	801
А. Д. Александров. Вывод четырехмерных ненормальных параллелоэдров (с резюме на франц. яз.)	803
Ш. Е. Микеладзе. О численном интегрировании дифференциальных уравнений с частными производными (с 3 фиг. и резюме на франц. яз.)	819
Д. Ю. Панов. О применении методы академика С. А. Чаплыгина к решению интегральных уравнений (с 4 фиг. и резюме на немецк. яз.)	843
В. С. Федоров. О криволинейных интегралах (с резюме на франц. яз.)	887
А. П. Филиппов. Вынужденные колебания кручения валов при учете затухания (с резюме на немецк. яз.)	897
Ю. М. Толмачев. Качественное и количественное определение лития, рубидия и цезия спектральным путем (с резюме на англ. яз.)	905
И. В. Кротов и Г. Г. Иванов. Исследование защитных пленок на магнии, получаемых с помощью растворов силиката натрия и двухромовокалиевой соли (с 2 фиг., 3 табл. и резюме на франц. яз.)	921
Л. В. Писаржевский, Р. К. Корабельник и Е. С. Рынская. Комбинированное действие излучений и катализатора. I. Влияние ультрафиолетовых излучений на каталитическую активность катализатора при катализе перекиси водорода в водном растворе (с 1 фиг. и резюме на немецк. яз.)	931

	pag.
***G. Ikornikov.** Généralisation de la notion de produit vectoriel sur l'espace à *m* dimensions (avec résumé en français)	777
B. Delaunay. Sur la sphère vide. A la mémoire de Georges Voronoï (avec résumé en russe)	793
***A. Popov.** Sur quelques formules sommatoires (avec résumé en français)	801
***A. Alexandrov.** Déduction des paralléloèdres non normaux à 4 dimensions (avec résumé en français)	803
***Ch. Mikeladze.** Sur l'intégration numérique d'équations différentielles aux dérivées partielles (avec 3 fig. et résumé en français)	819
***D. Panov.** Sur l'application de la méthode de S. Caplygin aux solutions des équations intégrales (avec 4 fig. et résumé en allemand)	843
***V. Fedorov.** Sur les intégrales curvilignes (avec résumé en français)	887
***A. Filippov** (A. Philippoff). Les oscillations forcées de torsion des arbres quant'à la résistance visqueuse (avec résumé en allemand)	897
***G. Tolmačev.** Détermination qualitative et quantitative du lithium, du rubidium et du césium par l'analyse spectral (avec résumé en anglais)	905
***I. Krotov et G. Ivanov.** Étude des films protecteurs sur le magnésium, obtenus par électrolyse dans les solutions du silicate de sodium et du bichromate de potassium (avec 2 fig., 3 pl. et résumé en français)	921
***L. Pisarževskij, R. Korabelnik und E. Rynskaja.** Die Kombinierte Wirkung der Strahlung und des Katalysators. I. Der Einfluss des ultravioletten Lichtes auf die katalytische Aktivität des Katalysators bei der Katalyse des Wasserstoffperoxyds in wässeriger Lösung (mit 1 fig. und einer deutschen Zusammenfassung)	931

Заглавие, отмеченное звездочкой, является переводом заглавия оригинала

Le titre marqué d'un astérisque est une traduction du titre original

Цена 3 руб. 50 коп.